

**T.C.
SAKARYA UYGULAMALI BİLİMLER ÜNİVERSİTESİ
LİSANSÜSTÜ EĞİTİM ENSTİTÜSÜ**

**YÜKSEK HIZLI TREN VE ESNEK YAPI ETKİLEŞİMİNDEN
KAYNAKLI TİTREŞİMLERİN MATEMATİKSEL
MODELLENMESİ VE BİLGİSAYAR SİMÜLASYONU**

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Anıl TUNÇ

Enstitü Anabilim Dalı : MEKATRONİK MÜHENDİSLİĞİ

Tez Danışmanı : Dr. Öğr. Üyesi Mehmet Akif KOÇ

Temmuz 2021

T.C.
SAKARYA UYGULAMALI BİLİMLER ÜNİVERSİTESİ
LİSANSÜSTÜ EĞİTİM ENSTİTÜSÜ

YÜKSEK HIZLI TREN VE ESNEK YAPI ETKİLEŞİMİNDEN
KAYNAKLI TİTREŞİMLERİN MATEMATİKSEL
MODELLENMESİ VE BİLGİSAYAR SİMÜLASYONU

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Anıl TUNÇ

Enstitü Anabilim Dalı : MEKATRONİK
MÜHENDİSLİĞİ

Bu tez 14/07/2021 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından oybirliği ile kabul edilmiştir.

JÜRİ	BAŞARI DURUMU
Jüri Başkanı: Dr. Öğr. Üyesi Mehmet Akif KOÇ	BAŞARILI
Üye: Prof. Dr. Durmuş KARAYEL	BAŞARILI
Üye: Doç. Dr. İsmail ESEN	BAŞARILI

BEYAN

Tez içindeki tüm verilerin akademik kurallar çerçevesinde tarafımdan elde edildiğini, görsel ve yazılı tüm bilgi ve sonuçların akademik ve etik kurallara uygun şekilde sunulduğunu, kullanılan verilerde herhangi bir tahrifat yapılmadığını, başkalarının eserlerinden yararlanılması durumunda bilimsel normlara uygun olarak atıfta bulunulduğunu, tezde yer alan verilerin bu üniversite veya başka bir üniversitede herhangi bir tez çalışmasında kullanılmadığını beyan ederim

Anıl Tunç

14/07/2021

TEŞEKKÜR

Yüksek lisans eğitiminin boyunca değerli bilgi ve deneyimlerinden yararlandığım, her konuda bilgi ve desteğini almaktan çekinmediğim, araştırmanın planlanmasından yazılmasına kadar tüm aşamalarında yardımlarını esirgemeyen, teşvik eden, aynı titizlikte beni yönlendiren değerli danışman hocam Dr. Öğr. Üyesi Mehmet Akif KOÇ'a teşekkürlerimi sunarım.

İÇİNDEKİLER

BEYAN.....	ii
TEŞEKKÜR	i
İÇİNDEKİLER	ii
KISALTMALAR	iv
SİMGELER	v
TABLolar LİSTESİ.....	viii
ŞEKİLLER LİSTESİ.....	x
ÖZET.....	xii
SUMMARY	xiii
BÖLÜM 1. GİRİŞ	1
BÖLÜM 2. LİTERATÜR ARAŞTIRMASI	2
2.1. Boji	2
2.1.1. Aks sayısına göre bojiler	2
2.1.2. Bojilerdeki süspansiyon sistemleri	3
2.1.2.1. Birincil süspansiyon sistemi.....	3
2.1.2.2. İkincil süspansiyon sistemi.....	4
2.2. Süspansiyon Sistemleri	5
2.2.1. Pasif süspansiyon sistemleri	5
2.2.2. Aktif süspansiyon sistemleri.....	5
2.2.3. Yarı aktif süspansiyon sistemleri.....	6
2.3. Tasarım Modelleme.....	7
2.3.1. Çeyrek araç modeli	8
2.3.2. Yarım araç modeli	9
2.3.3. Tam araç modeli	10
2.4. Bilgisayar Destekli Nümerik Analiz	10
BÖLÜM 3.....	12
TREN VE KÖPRÜ ETKİLEŞİMİNİN MATEMATİKSEL MODELİ.....	12
3.1. Matematiksel Modelin Oluşturulması	12
3.2. Tren-Köprü Etkileşimine Ait Hareket Denklemlerin Elde Edilmesi	15
BÖLÜM 4. NÜMERİK ANALİZ	22
4.1. Köprünün Mod Frekansları Ve Tren Kritik Hız.....	23
BÖLÜM 5. ANALİZ SONUÇLARI	25
5.1. Sayısal Doğrulama	25
5.1.1. Hareketli osilatör modeli	26

5.2. Tren Gövdesinin Kütlesinin(m_s) Trenin ve Köprü Dinamiği zerindeki Etkisi	27
5.3. Tren Hızının(v) Tren ve Köprü Dinamiği zerindeki Etkisi	31
5.4. Köprü Uzunluğunun(L) Ten ve Köprü Dinamiği zerindeki Etkisi.....	34
5.5. Tren Aks Mesafesinin(b) Tren ve Köprü Dinamiği zerindeki Etkisi	38
5.6. Sönüm Oranının (ζ) Trenin Dinamiği zerindeki Etkisi	41
5.7. Köprü Titreşim Mod Sayısının(n) Trenin Dinamiği zerindeki Etkisi	42
5.8. Zaman Adımı Büyüklüğü Δt 'nin zm Hassasiyetine Etkisi.....	46
BÖLÜM 6. SONUÇ VE ÖNERİLER.....	48
KAYNAKLAR	54
EKLER.....	56



KISALTMALAR

HST	: Yüksek Hızlı Tren
SD	: Serbestlik Derecesi
DOF	: Degree of Freedom
TKE	: Tren Köprü Etkileşimi
SEY	: Sonlu Elemanlar Yöntemi

SİMGELER

m_s	: Tren gövdesinin kütlesi
m_{b1}	: Tren ön boji kütlesi
m_{b2}	: Tren arka boji kütlesi
m_{t1}	: Tren ön boji ön tekerlek kütlesi
m_{t2}	: Tren ön boji arka tekerlek kütlesi
m_{t3}	: Tren arka boji ön tekerlek kütlesi
m_{t4}	: Tren arka boji arka tekerlek kütlesi
J_s	: Tren gövdesinin atalet momenti
J_{b1}	: Tren ön bojisinin atalet momenti
J_{b2}	: Tren arka bojisinin atalet momenti
k_{s1}	: Birincil süspansiyon sistemi ön boji yay sabiti
k_{s2}	: Birincil süspansiyon sistemi arka boji yay sabit
k_{b1}	: İkincil süspansiyon sistemi ön boji ön tekerlek yay sabiti
k_{b2}	: İkincil süspansiyon sistemi ön boji arka tekerlek yay sabiti
k_{b3}	: İkincil süspansiyon sistemi arka boji ön tekerlek yay sabiti
k_{b4}	: İkincil süspansiyon sistemi arka boji arka tekerlek yay sabiti
k_{t1}	: Ön boji ön tekerlek ile ray arasındaki yay sabiti
k_{t2}	: Ön boji arka tekerlek ile ray arasındaki yay sabiti
k_{t3}	: Arka boji ön tekerlek ile ray arasındaki yay sabiti
k_{t4}	: Arka boji arka tekerlek ile ray arasındaki yay sabiti
c_{s1}	: Birincil süspansiyon sistemi ön boji sönüm katsayısı
c_{s2}	: Birincil süspansiyon sistemi arka boji sönüm katsayısı
c_{b1}	: İkincil süspansiyon sistemi ön boji ön tekerlek sönüm katsayısı
c_{b2}	: İkincil süspansiyon sistemi ön boji arka tekerlek sönüm katsayısı
c_{b3}	: İkincil süspansiyon sistemi arka boji ön tekerlek sönüm katsayısı
c_{b4}	: İkincil süspansiyon sistemi arka boji arka tekerlek sönüm katsayısı

c_{t1}	: Ön boji ön tekerlek ile ray arasındaki sönüm katsayısı
c_{t2}	: Ön boji arka tekerlek ile ray arasındaki sönüm katsayısı
c_{t3}	: Arka boji ön tekerlek ile ray arasındaki sönüm katsayısı
c_{t4}	: Arka boji arka tekerlek ile ray arasındaki sönüm katsayısı
a_1	: Tren gövdesinin ağırlık merkezi ile ön boji arasındaki mesafe
a_2	: Tren gövdesinin ağırlık merkezi ile arka boji arasındaki mesafe
b_1	: Ön boji ağırlık merkezi ile ön boji ön tekerlek arasındaki mesafe
b_2	: Ön boji ağırlık merkezi ile arka boji ön tekerlek arasındaki mesafe
c_1	: Arka boji ağırlık merkezi ile ön boji ön tekerlek arasındaki mesafe
c_2	: Arka boji ağırlık merkezi ile arka boji ön tekerlek arasındaki mesafe
E	: Köprün elastikiye modülü
L	: Köprü uzunluğu
I	: Köprü eylemsizlik momenti
V	: Tren hızı
μ	: Köprünün birim uzunluğunun kütlesi
c	: Köprünün eşdeğer sönüm katsayısı
y_s	: Tren gövdesinin doğrusal yer değiştirmesi
y_{b1}	: Tren ön bojisinin doğrusal yer değiştirmesi
y_{b2}	: Tren arka bojisinin doğrusal yer değiştirmesi
y_{t1}	: Tren ön boji ön tekerleğinin doğrusal yer değiştirmesi
y_{t2}	: Tren ön boji arka tekerleğinin doğrusal yer değiştirmesi
y_{t3}	: Tren arka boji ön tekerleğinin doğrusal yer değiştirmesi
y_{t4}	: Tren arka boji arka tekerleğinin doğrusal yer değiştirmesi
θ_s	: Yer değiştirme vektörü bileşenleri
θ_{b1}	: Tren ön bojisinin dairesel yer değiştirmesi
θ_{b2}	: Tren arka bojisinin doğrusal yer değiştirmesi
δ_{t1}	: Tren ön boji ön tekerleğinin köprü girişine olan mesafesi
δ_{t2}	: Tren ön boji arka tekerleğinin köprü girişine olan mesafesi
δ_{t3}	: Tren arka boji ön tekerleğinin köprü girişine olan mesafesi
δ_{t4}	: Tren arka boji arka tekerleğinin köprü girişine olan mesafesi
E_K	: Kinetik Enerji
E_P	: Potansiyel Enerji
E_D	: Sönüm Enerjisi

q_m	: Genelleştirilmiş koordinatlar
Q	: Kuvvet vektörü
Z_r	: Tren köprü üzerinde ilerlerken köprünün dikey yer değiştirmesi
η_i	: Köprünün titreşim modu
ϕ_i	: Köprünün karakteristik formülü
F_i	: Trenden köprüye etki eden statik kuvvet
W_i	: Tren elemanlarının ağırlıkları
f_i	: Köprünün kritik frekansı
$v_{cr,j}$: Trenin kritik hızı



TABLolar LİSTESİ

Tablo 3.1.1: Çalışmada kullanılan parametreler.	13
Tablo 3.1.2 : Çalışmada kullanılan tren ve köprü parametrelerinin değerleri..	14
Tablo 4.1.1: Dört mod için mod frekansları ve kritik hızlar.	24
Tablo 5.2.1: Tren gövdesinin kütesinin değişiminin Şekil 5.2.1a ‘deki grafiğin titreşim genliğine etkisi.....	29
Tablo 5.2.2: Tren gövdesinin kütesinin değişiminin Şekil 5.2.1b ‘deki grafiğin titreşim genliğine etkisi.....	29
Tablo 5.2.3: Tren gövdesinin kütesinin değişiminin Şekil 5.2.2a ‘deki grafiğin titreşim genliğine etkisi.....	30
Tablo 5.2.4: Tren gövdesinin kütesinin değişiminin Şekil 5.2.2b ‘deki grafiğin titreşim genliğine etkisi.....	31
Tablo 5.3.1: Tren hızının değişiminin Şekil 5.3.1a ‘deki grafiğin titreşim genliğine etkisi.....	32
Tablo 5.3.2: Tren hızının değişiminin Şekil 5.3.1b ‘deki grafiğin titreşim genliğine etkisi.....	33
Tablo 5.3.3: Tren hızının değişiminin Şekil 5.3.2a ‘deki grafiğin titreşim genliğine etkisi.....	34
Tablo 5.3.4: Tren hızının değişiminin Şekil 5.3.2b ‘deki grafiğin titreşim genliğine etkisi.....	34
Tablo 5.4.1: Tren uzunluğunun Şekil 5.4.1a ‘deki grafiğin titreşim genliğine etkisi.....	36
Tablo 5.4.2: Tren uzunluğunun Şekil 5.4.1b ‘deki grafiğin titreşim genliğine etkisi.....	36
Tablo 5.4.3: Tren uzunluğunun Şekil 5.4.2a ‘deki grafiğin titreşim genliğine etkisi.....	37
Tablo 5.4.4: Tren uzunluğunun Şekil 5.4.2b ‘deki grafiğin titreşim genliğine etkisi.....	38
Tablo 5.5.1: Tren aks mesafesinin Şekil 5.5.1a ‘daki grafiğin titreşim genliğine etkisi.....	39
Tablo 5.5.2: Tren aks mesafesinin Şekil 5.5.1b ‘deki grafiğin titreşim genliğine etkisi.....	39
Tablo 5.5.3: Tren aks mesafesinin Şekil 5.5.2a ‘daki grafiğin titreşim genliğine etkisi.....	40
Tablo 5.5.4: Tren aks mesafesinin Şekil 5.5.2b ‘deki grafiğin titreşim genliğine etkisi.....	41
Tablo 5.6.1: Sönüm oranının Şekil 5.6.1a ‘daki grafiğin titreşim genliğine etkisi....	42
Tablo 5.6.2. Sönüm oranının Şekil 5.6.1b ‘deki grafiğin titreşim genliğine etkisi....	42
Tablo 5.7.1: Titreşim mod sayısının köprü orta noktası yer değiştirmesine etkisi... .	45
Tablo 5.7.2: Titreşim mod sayısının tren gövde yer değiştirmesine etkisi... ..	45
Tablo 5.7.3: Titreşim mod sayısının tren gövde ivmelenmesine etkisi.....	46

Tablo 5.8.1: Zaman adım büyüklüğünün köprü orta noktası ivmelenmesine etkisi...47



ŞEKİLLER LİSTESİ

Şekil 2.1 : Tek akslı vagon bojisi.....	2
Şekil 2.2 : Y32 bojisinin süspansiyon sistemi.....	3
Şekil 2.3 : Birincil süspansiyon modeli.....	4
Şekil 2.4 : İkincil süspansiyon modeli.....	5
Şekil 2.5 : Modern ER tipi yarı-aktif damperlerin çalışma prensibi.....	7
Şekil 2.6 : Çeyrek araç modeli.....	8
Şekil 2.7 : Yarım araç modeli.....	9
Şekil 2.8 : Tam araç modeli.....	10
Şekil 3.1 : Bu çalışmada kullanılan tren ve köprü etkileşimi fiziksel modeli.....	13
Şekil 4.1 : Analiz algoritması.....	23
Şekil 5.1.1 : Hareketli osilatör modeli.....	26
Şekil 5.1.2 : Hareketli osilatör modeli için köprü orta noktası yer değiştirmesi.....	27
Şekil 5.2.1 : Tren gövdesinin kütlelerinin (m_c) köprü ve tren dinamiği üzerindeki etkisinin karşılaştırılması: (a)Tren gövdesinin yer değiştirmesi(m) (b)Köprü orta noktasının yer değiştirmesi.....	28
Şekil 5.2.2: Tren gövdesinin kütlelerinin (m_c) tren dinamiği üzerindeki etkisinin karşılaştırılması: (a)Tren gövdesinin ivmesi (m/s^2) ve (b) Köprü orta noktası ivmesi (m/s^2).....	30
Şekil 5.3.1: Tren hızının (v) köprü ve tren dinamiği üzerindeki etkisinin karşılaştırılması: (a)Tren gövdesinin yer değiştirmesi(m) (b)Köprü orta noktasının yer değiştirmesi.....	32
Şekil 5.3.2: Tren hızının (v) tren dinamiği üzerindeki etkisinin karşılaştırılması: (a)Tren gövdesinin ivmesi (m/s^2) ve (b) Köprü orta noktası ivmesi (m/s^2).....	34
Şekil 5.4.1: Tren uzunluğunun (l) tren dinamiği üzerindeki etkisinin karşılaştırılması: (a)Tren gövdesinin yer değiştirmesi (m) ve (b) Köprü orta noktasının yer değiştirmesi (m).....	35
Şekil 5.4.2: Köprü uzunluğunun (l) tren dinamiği üzerindeki etkisinin karşılaştırılması: (a)Tren gövdesinin ivmesi (m/s^2) ve (b) Köprü orta noktası ivmesi(m/s^2).....	37
Şekil 5.5.1 : Tren aks mesafesi (b) tren dinamiği üzerindeki etkisinin karşılaştırılması: (a)Tren gövdesinin yer değiştirmesi (m) ve (b) Köprü orta noktasının yer değiştirmesi (m).....	39
Şekil 5.5.2: Köprü sönüm oranının tren dinamiği üzerindeki etkisinin karşılaştırılması: (a)Tren gövdesinin ivmesi (m/s^2) ve (b) Köprü orta noktası ivmesi (m/s^2).....	40
Şekil 5.6.1: Köprü sönüm oranının tren dinamiği üzerindeki etkisinin karşılaştırılması: (a)Tren gövdesinin yer değiştirmesi (m) ve (b) Köprü orta noktasının yer değiştirmesi (m).....	42

Şekil 5.7.1: Köprü titreşim mod sayısının tren dinamiği üzerindeki etkisinin karşılaştırılması: (a)Tren gövdesinin yer değiştirmesi (m), (b) Köprü orta noktasının yer değiştirmesi (m) ve (b) Köprü orta noktasının yer ivmelenmesi (m/s ²).....	45
Şekil 5.8.1: Analizde kullanılacak zaman adım miktarının köprü orta noktası yer değiştirmesine etkisi.....	47



YÜKSEK HIZLI TREN VE ESNEK YAPI ETKİLEŞİMİNDEN KAYNAKLI TİTREŞİMLERİN MATEMATİKSEL MODELLENMESİ VE BİLGİSAYAR SİMÜLASYONU

ÖZET

Yüksek hızlı trenlerde (HST) işletme hızlarının giderek artması raylı araç gövdesine iletilen konfor bozucu titreşimlerinin de artmasına neden olmaktadır. Bu titreşimler sonucunda tren gövdesinde sarsılmalar oluşmaktadır. Oluşan sarsılmalar yolcuların konforunu olumsuz etkilemekle birlikte tren sürüş güvenliği açısından da sorun teşkil etmektedir. Ayrıca sadece tren gövdesi değil boji ve tekerleklerde de köprüden gelen dinamik etkiler sonucu titreşim hareketi gözlemlenmektedir. Bunun sonucunda trenin mekanik aksamında kullanılan hareketli parçalar zamanla deforme olmaktadır ve kullanım ömürleri azalmaktadır. Bu çalışmada esnek bir köprü üzerinde ilerleyen HST’de oluşan titreşimlerin matematiksel modellenmesi ve bilgisayar ortamında simülasyonu yapılmıştır. Ortaya çıkan titreşimler daha önce belirenmiş olan tren ve köprü parametreler göz önünde bulundurularak incelenmiştir. HST 10 serbestlik dereceli (SD) ve yarım araç olarak modellenmiştir. HST’nin üzerinde hareket ettiği esnek yapı ise basit mesnetli sınır şartlarına sahip Euler-Bernoulli kirişi göz önünde bulundurularak modellenmiştir. Elde edilen bu iki ayrı sistem tekerleklerin temas noktaları dikkate alınarak oluşturulan dinamik denklemler aracılığıyla bütünleştirilmiştir. Sistemin zamana bağlı bütünlük dinamik hareket denklemleri Newmark- β algoritması ile yüksek hassasiyette çözülmüştür. Analiz sonuçları tren gövdesinin kütlesi, tren hızı, köprü uzunluğu, tren aks mesafesi ve köprünün sönüm oranı göz önünde bulundurularak değerlendirilmiş, grafik ve tablolar ile zenginleştirilerek mühendislik bakış açısıyla yorumlanmıştır. Sonuç olarak oluşan titreşimlerin önlenmesi ile ilgili literatürde olan çalışmalardan bahsedilmiştir.

Anahtar Kelimeler: HST-köprü etkileşimi, Euler-Bernoulli, Newmark- β , konfor, nümerik analiz

**MATHEMATICAL MODELING AND COMPUTER
SIMULATION OF VIBRATIONS FROM HIGH SPEED TRAIN
AND FLEXIBLE BUILDING INTERACTION SUMMARY
SUMMARY**

Increasing operating speeds on high-speed trains (HST) are also causing increased comfort disruptor vibrations transmitted to the rail vehicle body. As a result of these vibrations, the train body is surrounded. While the conseed effects negatively affect the comfort of passengers, they also pose a problem for train driving safety. In addition, vibration movement is observed not only in the train body, but also in the boji and wheels as a result of dynamic effects from the bridge. As a result, the moving parts used in the mechanical parts of the train are deformed over time and their usage life decreases. In this study, mathematical modeling of vibrations occurring in HST advancing on a flexible bridge and simulation in computer environment was carried out. The resulting vibrations were examined taking into account the train and bridge parameters that appeared earlier. HST 10 is modeled as a free-rated (SD) and half-vehicle. The flexible structure on which the HST moves is modeled with the Euler-Bernoulli beam with simple installed boundary conditions in mind. These two separate systems are combined through dynamic equations created by taking into account the contact points of the wheels. The system's time-based integrated dynamic motion equations have been solved β with the Newmark-and-Newmark algorithm. The results of the analysis were evaluated taking into account the mass of the train body, train speed, bridge length, train axly distance and the dampening rate of the bridge, enriched with graphs and tables and interpreted from an engineering point of view. Studies in the literature on the prevention of resulting vibrations have been mentioned.

Keywords: HST-bridge Intraction, Euler-Bernoulli, Newmark- β , comfort, numeric analyse

BÖLÜM 1. GİRİŞ

Yüksek hızlı tren ve alt sistemleri birçok ülkede inşa edilip işletilmeye başlanmıştır. HST bir demiryolu köprüsü üzerinde yüksek bir hızla hareket ettiğinde köprü, tren ve tren bileşenleri arasındaki etkileşiminin neden olduğu aşırı konfor bozucu ve sürüş güvenliğini tehdit eden titreşimler oluşmaktadır.

Tren-köprü etkileşimi problemi iki farklı alt sistemden oluşan tümleşik, zamana bağlı ve dinamik bir problemdir. Bu iki alt sistem köprü yüzeyi ve tekerleklerin temas ettiği bölge ile birbirinden ayrılan iki elastik sistem olarak düşünülebilir. Birinci alt sistem tren alt sistemidir, tren gövdesi, boji, tekerlek ve süspansiyon sistemlerinden oluşmaktadır. İkinci alt sistem ise köprü alt sistemidir, elastik köprüden oluşmaktadır. HST tasarımında üzerinde trenin hareket ettiği demiryolu köprüsünün dinamiği çok önemlidir.

Altı bölümden oluşan bu çalışma kapsamında esnek bir köprü üzerinde yaklaşık hızı 300 km/h olan bir HST'de oluşan titreşimlerin modellenmesi ve TKE'nin dinamik analizi hedeflenmiştir. Giriş bölümünde çalışmanın kapsamından bahsedilerek, çalışma ile ilgili literatür araştırılmasına yer verilmiştir. İkinci bölümde TKE matematiksel modeli oluşturulmuş ve hareket denklemleri elde edilmiştir. Üçüncü bölümde çalışmada kullanılan nümerik analiz yöntemi açıklanmış ve analiz algoritmasına yer verilmiştir. Dördüncü bölümde köprü'nün mod frekansları ve HST'nin ulaşabileceği kritik hızlar hesaplanmıştır. Beşinci bölümde tren kütlesi, tren hızı, köprü uzunluğu, aks mesafesi ve sönüm oranının TKE dinamiğine etkisi HST'nin esnek köprü üzerindeki davranışı ele alınarak incelenmiştir. Buna ek olarak ilgili grafiklere ve tablolara yer verilmiştir.

BÖLÜM 2. LİTERATÜR ARAŞTIRMASI

2.1. Boji

Bojiler tren vagonu ile tekerlekler arasında bağlantıyı sağlamaktadır. Trendeki ihtiyaca göre farklı türde bojiler kullanılmaktadır. Örneğin yolcu taşıyan vagonlarda ve yük taşıyan vagonlarda kullanılan bojiler birbirinden farklıdır. Bunun sebebi, vagon titreşimlerinin yolcu taşıyan vagonlarda yük taşıyan vagonlara göre daha önemli olmasıdır. Bunun bir sonucu olarak da yolcu vagonlarındaki bojiye de fazladan bir süspansiyon sistemi bulunmaktadır(Eroğlu, Esen ve Koç, 2017).

2.1.1. Aks sayısına göre bojiler

Bojiler aks sayılarına göre tek,iki ve üç akslı bojiler olarak sınıflandırılır. Yüksek konfor aranmayan yük vagonlarında tek akslı boji kullanılır. İki akslı boji diğer bojiye göre daha yaygın olarak kullanılır. Hızlı tren bojiğinde iki akslı boji kullanılır.

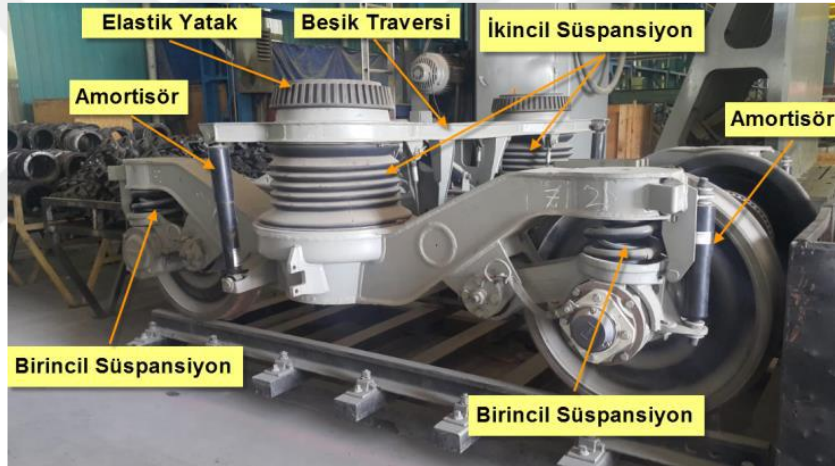


Şekil 2.1: Tek akslı vagon bojisi(Uygun, 2017)

Üç akslı bojiler daha çok güç gerektiren vagonlarda kullanılır. Örneğin sahip oldukları ekipmanlar dolayısıyla ağırlıkları fazla olan lokomotiflerde üç akslı bojiler kullanılır . Aksların ağırlıkları üzerinde sorunsuz bir şekilde taşıyabilmesi amacıyla aks sayısı arttırılmıştır. Böylece aks başına düşen yük de azaltılmıştır.

2.1.2. Bojilerdeki süspansiyon sistemleri

Raylı sistemlerdeki süspansiyon elemanları, emniyetli ve konforlu seyir imkânı sağlayan bir boji elemanıdır. Yol ve raydan kaynaklanan titreşimleri sönmüleyerek, raylı sistemin sahip olduğu diğer unsurların zarar görmesini önlemeye yardımcı olurlar. Y32 bojide 160-200 km/h hıza uygun imal edilmiş çift kademeli düşey süspansiyon sistemleri kullanılmaktadır. Bunlardan ilki birincil kademe süspansiyon, diğeri ise; ikincil kademe süspansiyon elemanlarıdır. Şekil 3'te Y32 bojisine ait süspansiyon sistemleri görülmektedir.

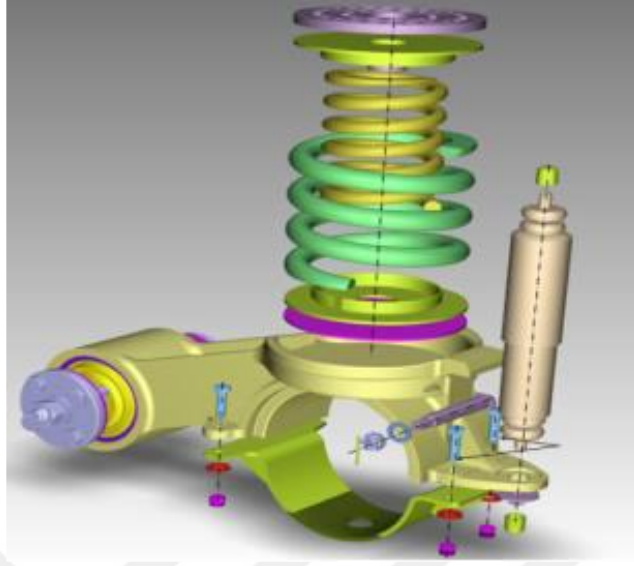


Şekil 2.2: Y32 bojisinin süspansiyon sistemi(Bolat ve Kam, 2020)

2.1.2.1. Birincil süspansiyon sistemi

Tekerlekler ile boji arasında kalan bölgede birincil süspansiyon sistemi bulunmaktadır. Birincil süspansiyon sistemi dört gruptan oluşmaktadır. Dört gruptan her birinde iç içe geçen iki helozon yay sistemi bulunur. Yay sisteminde üzerine gelen yükü almak amacıyla kauçuk yastık kullanılmaktadır. Kauçuk yastıklar dingil muhafazasının üzerinde yer alan bir biyel yuvasında konumlandırılmıştır. Dingil ve şasi arasında

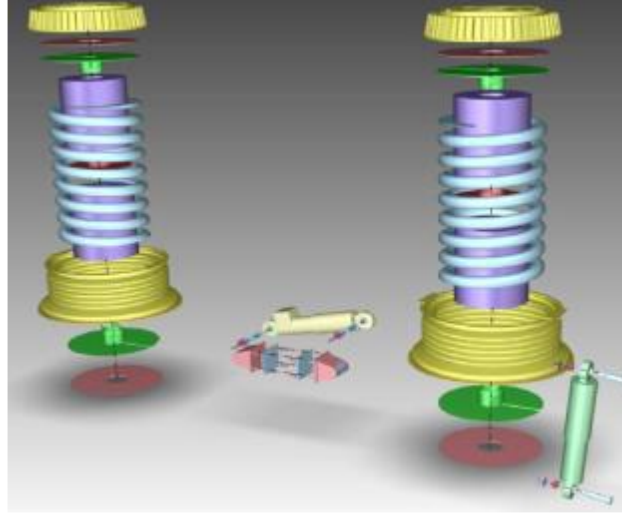
dingil muhafazasına dikey yükü ileten ve boji ile şasi arasındaki bağlantıyı sağlayan bir bağlantı kolu bulunmaktadır.



Şekil 2.3: Birincil süspansiyon modeli(Bilgin, 2015)

2.1.2.2. İkincil süspansiyon sistemi

Tren gövdesi ile boji arasında ikincil süspansiyon sistemi bulunmaktadır. İkincil süspansiyon sistemi ile tren gövdesinin bojiye olan yüksekliğini ayarlanabilmektedir. Bu sayede sürüş esnasında meydana gelen yan ve düşey titreşimlerin sönümlenmesi sağlanır. İkincil süspansiyon bir adet sağ bir adet sol olmak üzere iki gruptan oluşmaktadır. İç kısımda kauçuk takoz dış kısmında ise helezon yaydan bulunmaktadır(Bolat ve Kam, 2020).



Şekil 2.4: İkincil süspansiyon modeli(Bilgin, 2015).

2.2. Süspansiyon Sistemleri

Raylı sistemde hareket eden araçlar ray pürüzlülüğü, dönen elemanların dengesizliği ve tekerlek çevresinin düzgünlüğünden kaynaklanan titreşimlere maruz kalırlar. Bu titreşimler yüksek frekanslarda yolcu konforu ve sürüş güvenliği açısından tehlikeli olabilmektedir. Süspansiyon sistemi, titreşimlerden kaynaklanan gövde gerilmeleri, ivmeleri, tekerlek yükü salınımlarını ve sürücü rahatsızlığını minimize etmek amacıyla kullanılır(Şengirgin, 2000). Pasif, aktif ve yarı aktif olmak üzere üç farklı süspansiyon sistemi kullanılmaktadır.

2.2.1. Pasif süspansiyon sistemleri

Pasif süspansiyon sistemi yaygın olarak kullanılan geleneksel yöntemlerden biridir. Pasif süspansiyon sisteminde titreşimleri kontrol altına almak için konvansiyonel yay ve damperlerden oluşan mekanizma kullanılmaktadır. Kullanılan bu pasif elemanların ve mekanizmanın karakteristiği titreşim sönümlenmesini direkt olarak etkilemektedir(Tetik ve Kocadağ, 2019).

2.2.2. Aktif süspansiyon sistemleri

Pasif süspansiyon sistemlerinden istenilen iyileşmenin sağlanamaması sonucunda aktif süspansiyon sistemleri ön plana çıkmıştır. Aktif süspansiyon sistemleri, pasif süspansiyon sistemine sensör, eyleyici ve kontrolcü eklenmesiyle oluşturulmuştur.

Aktif süspansiyon sistemlerinin araçlarda oluşan titreşimleri yüksek düzeyde azalttığı ve konfor seviyelerini iyileştirdiği görülmüştür. Aktif süspansiyon sistemleri daha verimli olmasına rağmen, karmaşık bir yapıya sahiptir ve maliyeti de fazladır.

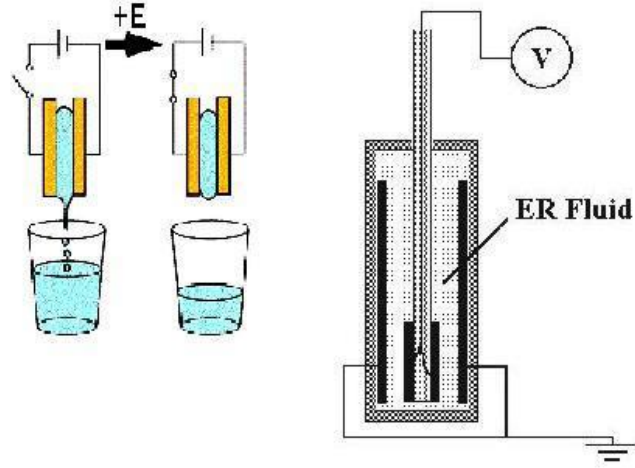
Aktif süspansiyon sistemlerinde aracın ve tekerleklerin hızını, tekerlek açılarını ve yük durumunu anlık olarak kontrol etmek amacıyla sensörler kullanılır. Sensörler tarafından alınan kontrol verileri kontrolcüye aktarılır. Kontrolcü sensörlerden alınan veriler ile yol ve aracın durumunu denetleyerek aracın yol durumuna adapte olması için aktüatörleri uyarır. Böylece sürüş konforu ile sürüş güvenliğini optimize edilmiş olur.

Aktif süspansiyon sistemleri kullanılan aktüatörlere göre farklılık gösterebilmektedir. Kullanılan aktüatörlere göre süspansiyon sistemlerine örnek olarak pnömatik, hidrolik, hidropnömatik ve elektromanyetik sistemler verilebilir.

Aktif süspansiyon sistemleri pasif süspansiyon sistemlerine göre daha karmaşıktır ve maliyeti daha fazladır, buna karşın sürüş konforu ve sürüş güvenliği açısından daha iyidir. Maliyetin fazla olması ve araca yüklenen toplam kütlenin artması sonucunda aktif süspansiyon sistemlerinin kullanımı oldukça azalmış ve maliyeti daha düşük olan yarı aktif süspansiyon sistemlerine ihtiyaç ortaya çıkmıştır(Gündüz, 2010).

2.2.3. Yarı aktif süspansiyon sistemleri

Yarı-aktif süspansiyon sistemlerinde süspansiyon sistemlerindeki parametreler eyleyici kullanılmadan değiştirilebilmektedir. Pasif süspansiyon sisteminde parametrelerin değiştirilememesinden kaynaklanan kayıpların ortadan kaldırılması yarı aktif süspansiyon sistemi ile mümkün olmaktadır. Bunun sonucu olarak yol ve aracın durumuna göre sürüş güvenliği ve sürüş konforu optimize edilebilmektedir.



Şekil 2.5: Modern ER tipi yarı-aktif damperlerin çalışma prensibi(Gündüz, 2010).

Yarı-aktif süspansiyon sistemleri genel olarak, damper katsayısı değişimine dayanan ve yay katsayısı değişimine dayanan yarı-aktif süspansiyon sistemleri olmak üzere iki ana başlık altında incelenir. Damper katsayısı değişimine dayanan yarı-aktif sistemler de kendi içinde damperlerin kesit alanlarının değişimini baz alan klasik damper katsayı değişimi ile damper içerisinde kullanılan sıvının elektrik alan ve manyetik alana göre farklı davranmasını baz alan modern damper katsayı değişimi olarak incelenebilir. Yay katsayısı değişimine dayanan yarı-aktif sistemlerde pnömatik ya da hidro pnömatik yaylar bulunur. Tasarımında ise sistemin içerdiği hava ya da sıvı hacmi yayın katsayısını etkilemesi baz alınır (Gündüz, 2010).

Yarı aktif süspansiyon sistemleri, pasif ve aktif süspansiyon sistemlerine göre performans veya maliyet açısından düşünüldüğünde daha avantajlıdır. Yol tutuş ve konfor açısından incelendiğinde ise yarı aktif süspansiyon sistemleri genellikle pasif ve aktif sistemlerin arasında bir konuma sahiptir. Aktif süspansiyon sistemine göre maliyetlinin ve güç tüketiminin düşük olması ve bununla birlikte pasif süspansiyonlara göre performans avantajı sağlaması ile yarı aktif süspansiyon sistemlerinin birçok ticari uygulamada ve teorik çalışmada yer almıştır (Ulukapı, 2005).

2.3. Tasarım Modelleme

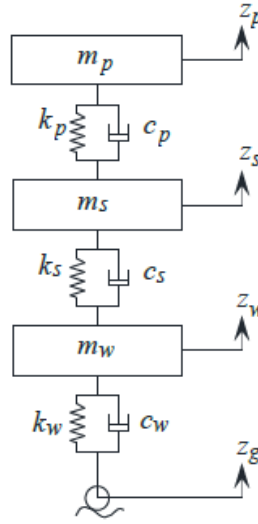
Raylı sistem üzerinde hareket eden araçların titreşimlerinin kontrol altına alınması sağlayan süspansiyon sistemleri başarılı bir modelleme ve iyi bir analiz sonucu oluşturulmuştur. Modeller, koşullar değiştikçe problemin çözümünde ne gibi değişiklikler olabileceğinin öngörülmesinde ve ileriye dönük kestirimler yapılabilmesinde kullanılmaktadır. Mühendislikte modelleme ve analiz yöntemleri

amaca uygun olarak seçilip uygulanması sorunun çözümü için çok önemlidir. Araç sistemlerinin modellenirken üç farklı araç modelinden biri dikkate alınarak model oluşturulur. Bu modeller; çeyrek araç modeli, yarım araç modeli ve tam araç modelidir(Sevgi, 2005).

2.3.1. Çeyrek araç modeli

Araçlar genel olarak yürüyen aksam üzerinde yanal ve düşey etkilere maruz kalmaktadırlar. Yanal ve düşey etkiler birlikte göz önüne alındığında üç boyutlu modelin gerekliliği düşünülebilir. Fakat konfor parametreleri düşünüldüğünde yanal etkilerden çok düşey etkiler ön planda olduğu görülmektedir. Bu sebeple araç modeli olarak üç boyutlu tam araç modeli yerine düşey etkilerin göz önüne alındığı çeyrek araç modeli kullanılması konfor bozucu titreşimlerin analiz edilebilmesi için yeterli olacaktır.

Çeyrek araç modelinde aracın 1/4' lük kısmı dikkate alınır. Bir çeyrek araç modeli, üzerine yüklenen dörtte birlik kütle, aks kütlesi, matematiksel modelleme için sertlik derecelerini sabit kabul ettiğimiz yaylar ve aktif ya da pasif sönümleyicilerden oluşmaktadır(Maden, 2012).



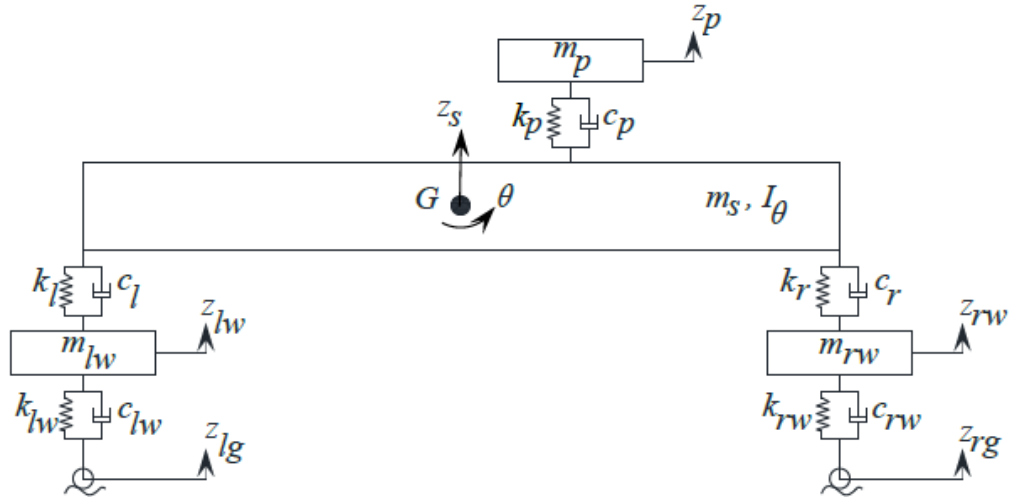
Şekil 2.6: Çeyrek araç modeli(Yıldırım, 2020)

Şekil 3.2'de üç serbestlik dereceli çeyrek araç olarak modelinin genel görünümü gösterilmektedir. Çeyrek araç modelleri iki ya da üç serbestlik dereceli olarak modellenir. Tekerlek ve araç gövdelerinin dinamik analizlerinin yapıldığı çalışmalarda iki serbestlik dereceli modeller kullanılırken, buna ek olarak sürücüye ve yolcuya etki

eden dinamik kuvvetlerin ve sistemin dinamik cevapların analizlerinin yapıldığı çalışmalar üç serbestlik dereceli olarak modellenmektedir.

2.3.2. Yarım araç modeli

Araç modeli tasarımında önemli parametrelerden biri de dönme hareketleridir. Dönme hareketlerinin incelenmesi konfor bozucu etmenleri incelemede önemlidir. Çeyrek araç modelinde konfor parametreleri incelenirken düşey eksenindeki kuvvetler incelenebilirken, dönme eksenindeki kuvvetler incelenememektedir. Bu sebeple de aracın dönme eksenindeki hareketlerinin de incelenebilmesini mümkün kılan yarım araç modeli oluşturulmuştur. Yarım araç modelinde çeyrek araç modelinde incelenemeyen dönme hareketi de incelebilmektedir. İncelenen dönme hareketinin yönü ise yapılan araştırmanın konusuna bağlı olarak değişebilmektedir. Şekil 3.2’de beş serbestlik dereceli yarım araç modeli gösterilmiştir.



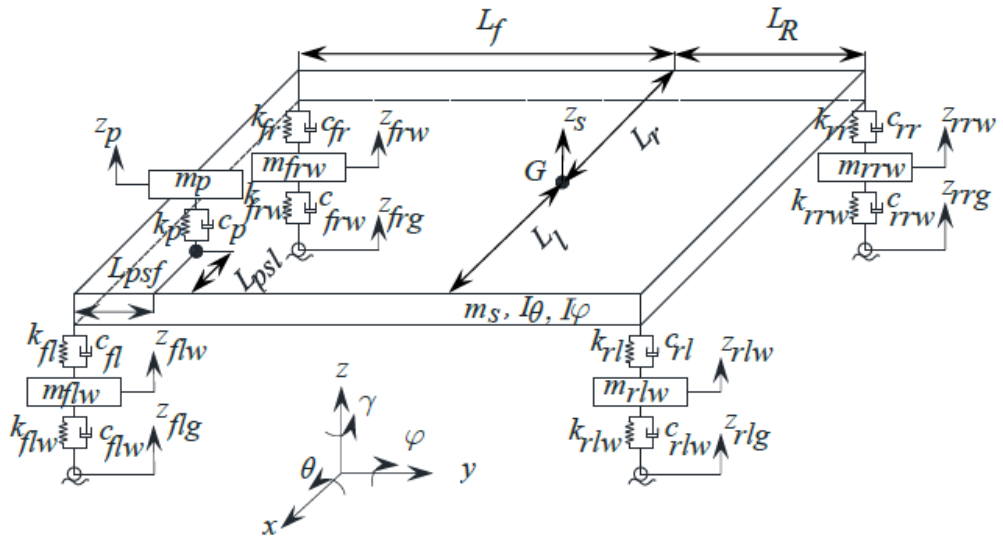
Şekil 2.7: Yarım araç modeli.(Yıldırım 2020)

Yarım araç modeli çeyrek araç modeline kıyasla daha detaylı ve gerçekçi sonuçlara ulaşılmasını sağlamaktadır. Ayrıca yarım araç modellerinin gibi serbestlik derecesi çeyrek araç modellerinde olduğu yapılan çalışmaya göre farklılık gösterebilmektedir. Sadece araç dinamiklerinin incelendiği durumlarda dört serbestlik derecesli model yeterli olurken, yolcunun ve ek komponentlerin de eklenmesi durumunda serbestlik derecesinin artması mümkün olacaktır.

Yarım araç modeli çeyrek araç modeline göre sistemi daha iyi temsil etmektedir, fakat serbestlik derecesi çeyrek araç modeline göre daha fazla olduğu için daha karmaşıktır ve çözüm süresi daha fazladır.

2.3.3. Tam araç modeli

Tam araç modeli dinamik analizlerin gerçekleştirilmesi için kullanılan en karmaşık ve detaylı yöntemdir. Bu modelde yarım araç modelinde olduğu gibi dikey hareketlere ek olarak dönme hareketleri de incelenebilmektedir. Fakat yarım araç modelinde tek yöndeki dönme hareketleri incelenebilirken, tam araç modelinde iki ya da üç yönde meydana gelen dönme hareketleri incelenebilmektedir. Dönme hareket yönlerinin sayısı yapılan çalışmaya göre değişebilmektedir. Tam araç modelinin serbestlik derecesi tasarımın detaylandırılmasına göre artabilmektedir. Serbestlik derecesinin artması sistemin karmaşıklığının artmasına ve çözüm süresinin uzamasına sebep olabilmektedir. Fakat diğer modellere kıyasla daha gerçekçi ve detaylı sonuçlara ulaşılmaktadır. Şekil 3.2’de tam araç modeli gösterilmektedir(Yıldırım 2020).



Şekil 2.8 Tam araç modeli(Yıldırım 2020)

2.4. Bilgisayar Destekli Nümerik Analiz

Matematiksel problemlerin bilgisayar ortamında modeli oluşturulduktan sonra belirli yöntemler kullanılarak çözülmesi gerekmektedir. Problemlerin çözümü için nümerik yöntemler kullanılmaktadır. Çok sayıda ve türde nümerik yöntem bulunmaktadır,

fakat bu nümerik yöntemlerin ortak özelliği karmaşık işlemlerden oluşmasıdır. Bilgisayarın bulunmasıyla birlikte nümerik yöntemlerin daha verimli şekilde kullanılması mümkün olmuştur. Son yıllarda yüksek hızlı ve verimli bilgisayarların gelişmesinin bir sonucu olarak mühendislik problemlerinin nümerik yöntemlerle çözümü için yeni algoritmalar bulunmuştur(Yüncü ve Aslan 2002). Bu yeni algoritmalar sayesinde problem çözüm süresi kısalmış ve daha gerçekçi sonuçlara ulaşılmıştır.



BÖLÜM 3.

TREN VE KÖPRÜ ETKİLEŞİMİNİN MATEMATİKSEL MODELİ

3.1. Matematiksel Modelin Oluşturulması

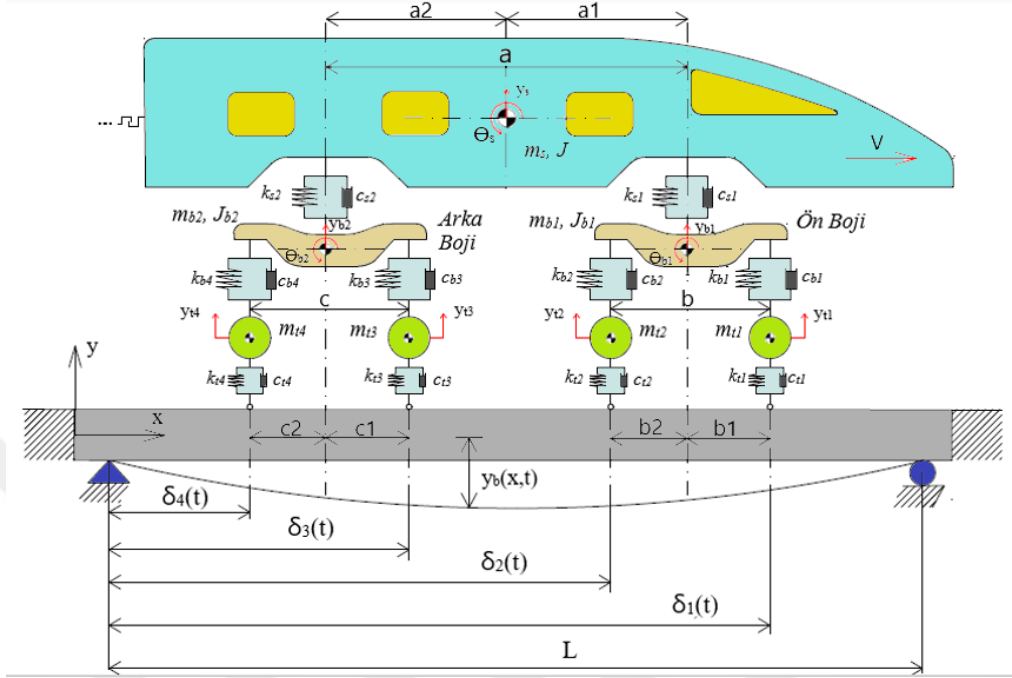
TKE problemi iki ayrı alt sistem olarak incelenmektedir. Bu iki alt sistem kontak halinde olduğu için birbirini etkiler. Trenin köprü üzerindeki hareketi sonucunda köprüye etki eden dinamik kuvvetler köprüde titreşimlerin oluşmasına neden olur. Köprüde oluşan bu titreşimler sonucunda ise trende tepki kuvvetleri oluşmaktadır (Arvidsson 2014).

Şekil 3.1’ de Euler-Bernoulli kiriş teorisi ile modellenen basit mesnetli esnek bir köprü ve üzerinde sabit v hızı ile ilerleyen 10-SD’li HST yarım araç modeli gösterilmiştir. HST yarım araç modeli ön boji, arka boji, tekerlekler ve tren gövdesinden meydana gelmiştir. Şekil 3.1’ de verilen fiziksel model üzerindeki parametrelerinin açıklaması ve bu çalışmada kullanılan değerleri Tablo 3.1.1 ve Tablo 3.1.2’de verilmiştir.

Problemin matematiksel modeli aşağıdaki varsayımlar göz önünde bulundurularak oluşturulmuştur:

1. Tren modeli 10-SD yarım araç modeli olarak modellenmekte ve modelde ön arka boji, tren gövdesi, tekerlekler, boji ile tren gövdesini arasında olan birincil süspansiyon sistemi ve tekerlekler ile boji arasında olan ikincil süspansiyon sistemi bulunmaktadır.
2. Tekerlekler lineer özelliğe sahip yaylar ve sönümlenme elemanları kullanılarak modellenmiştir.
3. Ray pürüzlülükleri dikkate alınmamıştır.
4. Trenin üzerinden geçtiği köprü basit mesnetli sınır şartlarına sahip olarak Euler-Bernoulli kiriş teorisine göre modellenmiştir.
5. Raylar esnek köprü ile bütünleşik olarak kabul edilmiştir. Sahip olduğu direngenlik köprüye eklenerek hesaplamalar yapılmıştır.
6. Yüksek hızlı trenin hızı sabit olarak kabul edilmiştir.

Bu çalışmada kullanılan parametreler ve parametrelerin sayısal değerlerini içeren tablo Tablo 3.1.1 ve Tablo 3.1.2 ile verilmiştir.



Şekil 3.1: Bu çalışmada kullanılan tren ve köprü etkileşimi fiziksel modeli

Tablo 3.1.1: Çalışmada kullanılan parametreler

Parametreler	
y_s	Trenin doğrusal hareketi
θ	Trenin dairesel hareketi
y_{b1}	Ön bojinin doğrusal hareketi
θ_{b1}	Ön bojinin dairesel hareketi
y_{b2}	Arka bojinin doğrusal hareketi
θ_{b2}	Arka bojinin dairesel hareketi
y_{t1}	Ön boji ön tekerleğinin doğrusal hareketi
y_{t2}	Ön boji arka tekerleğinin doğrusal hareketi
y_{t3}	Arka boji ön tekerleğinin doğrusal hareketi
y_{t4}	Arka boji arka tekerleğinin doğrusal hareketi

Tablo 3.1.2: Çalışmada kullanılan tren ve köprü parametrelerinin değerleri.

Tren Parametreleri	
Tren gövdesinin kütlesi(m_s)	41.75 ton
Ön ve arka boji kütleleri($m_{b1}=m_{b2}$)	3.04 ton
Tekerlek kütleleri($m_{t1}= m_{t2}= m_{t3}= m_{t4}$)	1.78 ton
Tren gövdesinin atalet momenti(J)	2080 ton.m ²
Ön ve arka bojilerin atalet momenti($J_{b1}=J_{b2}$)	3.93 ton.m ²
Birincil süspansiyon sisteminin yay sabitleri($k_{s1}=k_{s2}$)	1180 kN/m
İkincil süspansiyon sisteminin yay sabitleri($k_{b1}=k_{b2}=k_{b3}=k_{b4}$)	530 kN/m
Birincil süspansiyon sisteminin sönüm katsayıları($c_{s1}=c_{s2}$)	39.2 kNs/m
İkincil süspansiyon sisteminin sönüm katsayıları($c_{b1}=c_{b2}=c_{b3}=c_{b4}$)	90.2 kNs/m
Tekerlekler ve zemin arasındaki yay sabitleri($k_{t1}=k_{t2}=k_{t3}=k_{t4}$)	530 kN/m
Tekerlekler ve zemin arasındaki sönüm oranları($c_{t1}=c_{t2}=c_{t3}=c_{t4}$)	90.2 kNs/m
Tren gövdesinin ağırlık merkezi ile ön ve arka bojinin arasındaki mesafe($a1=a2$)	8.75 m
Ön boji kütle merkezinin ön boji ön ve arka tekerleklerine olan mesafesi($b1=b2$)	1.25 m
Arka boji kütle merkezinin arka boji ön ve arka tekerleklerine olan mesafesi($c1=c2$)	1.25 m
Köprü Parametreleri	
Elastikiye Modülü(E)	207 GPa
Köprü Uzunluğu(L)	35 m
Eylemsizlik Momenti(I)	0.2 m ⁴
Köprünün birim uzunluğunun kütlesi(μ)	10 t/m
Köprünün eşdeğer sönüm katsayısı(c)	1750 Ns/m

3.2. Tren-Köprü Etkileşimine Ait Hareket Denklemlerin Elde Edilmesi

Sistemin hareket denklemleri kinetik, potansiyel ve sönüm enerjileri kullanılarak elde edilmiştir. Şekil.1’de verilen TKE fiziksel modelinin tren bölümünün enerji denklemleri Denklemler (3.2.1-3.2.3)’de sırasıyla verilmiştir.

$$E_k = \frac{1}{2} \left\{ m_s \dot{y}_s^2 + m_{b1} \dot{y}_{b1}^2 + m_{b2} \dot{y}_{b2}^2 + m_{t1} \dot{y}_{t1}^2 + m_{t2} \dot{y}_{t2}^2 \right. \\ \left. + m_{t3} \dot{y}_{t3}^2 + m_{t4} \dot{y}_{t4}^2 + J \ddot{\theta}^2 + J_{b1} \ddot{\theta}_{b1}^2 + J_{b2} \ddot{\theta}_{b2}^2 \right\} \quad (3.2.1)$$

$$E_p = \frac{1}{2} \left\{ k_{s1} (y_s + \theta a_1 - y_{b1})^2 + k_{s2} (y_s - \theta a_2 - y_{b2})^2 + k_{b1} (y_{b1} + \theta_{b1} b_1 - y_{t1})^2 + k_{b2} (y_{b1} - \theta_{b1} b_2 - y_{t2})^2 \right. \\ \left. + k_{b3} (y_{b2} + \theta_{b2} c_1 - y_{t3})^2 + k_{b4} (y_{b2} - \theta_{b2} c_2 - y_{t4})^2 + k_{t1} (y_{t1} - y_{r1})^2 + k_{t2} (y_{t2} - y_{r2})^2 \right. \\ \left. + k_{t3} (y_{t3} - y_{r3})^2 + k_{t4} (y_{t4} - y_{r4})^2 \right\} \quad (3.2.2)$$

$$E_D = \frac{1}{2} \left\{ c_{s1} (\dot{y}_s + \dot{\theta} a_1 - \dot{y}_{b1})^2 + c_{s2} (\dot{y}_s - \dot{\theta} a_2 - \dot{y}_{b2})^2 + c_{b1} (\dot{y}_{b1} + \dot{\theta}_{b1} b_1 - \dot{y}_{t1})^2 + c_{b2} (\dot{y}_{b1} - \dot{\theta}_{b1} b_2 - \dot{y}_{t2})^2 \right. \\ \left. + c_{b3} (\dot{y}_{b2} + \dot{\theta}_{b2} c_1 - \dot{y}_{t3})^2 + c_{b4} (\dot{y}_{b2} - \dot{\theta}_{b2} c_2 - \dot{y}_{t4})^2 + c_{t1} (\dot{y}_{t1} - \dot{y}_{r1})^2 + c_{t2} (\dot{y}_{t2} - \dot{y}_{r2})^2 \right. \\ \left. + c_{t3} (\dot{y}_{t3} - \dot{y}_{r3})^2 + c_{t4} (\dot{y}_{t4} - \dot{y}_{r4})^2 \right\} \quad (3.2.3)$$

Oluşturulan enerji denklemleri Denklem (3.2.4) ile verilen Lagrange denkleminde yerine yazarak hareket denklemleri elde edilmiştir.

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial E_K}{\partial \dot{q}_m} \right) + \left(\frac{\partial E_p}{\partial q_m} \right) + \left(\frac{\partial E_D}{\partial \dot{q}_m} \right) = 0 \quad (3.2.4)$$

Denklem (3.2.4)’ de q_m ($m=1,2,3,\dots,10$) genelleştirilmiş koordinatları temsil etmektedir. Denklem (3.2.4) ile elde edilen hareket denklemleri aşağıda verilmiştir.

Tren gövdesinin lineer hareket denklemi (y_s) aşağıdaki gibi ifade edilir.

$$m_s \ddot{y}_s + c_{s1} (\dot{y}_s + \dot{\theta} a_1 - \dot{y}_{b1}) + c_{s2} (\dot{y}_s - \dot{\theta} a_2 - \dot{y}_{b2}) + k_{s1} (y_s + \theta a_1 - y_{b1}) \\ + k_{s2} (y_s - \theta a_2 - y_{b1}) = 0 \quad (3.2.5)$$

Tren gövdesinin dairesel hareket denklemi (θ) aşağıdaki gibi ifade edilir.

$$J \ddot{\theta} + c_{s1} a_1 (\dot{y}_s + \dot{\theta} a_1 - \dot{y}_{b1}) - c_{s2} a_2 (\dot{y}_s - \dot{\theta} a_2 - \dot{y}_{b2}) + k_{s1} a_1 (y_s + \theta a_1 - y_{b1}) \\ - k_{s2} a_2 (y_s - \theta a_2 - y_{b1}) = 0 \quad (3.2.6)$$

Ön boji lineer hareket denklemi (y_{b1}) aşağıdaki gibi ifade edilir.

$$\begin{aligned}
& m_{b1}\ddot{y}_{b1} - c_{s1}(\dot{y}_s + \dot{\theta}a_1 - \dot{y}_{b1}) + c_{b1}(\dot{y}_{b1} + \dot{\theta}_{b1}b_1 - \dot{y}_{t1}) + c_{b2}(\dot{y}_{b1} - \dot{\theta}_{b1}b_2 - \dot{y}_{t2}) \\
& - k_{s1}(y_s + \theta a_1 - y_{b1}) + k_{b1}(y_{b1} + \theta_{b1}b_1 - y_{t1}) + k_{b2}(y_{b1} - \theta_{b1}b_2 - y_{t2}) = 0
\end{aligned} \tag{3.2.7}$$

Ön boji dairesel hareket denklemi (θ_{b1}) aşağıdaki gibi ifade edilir.

$$\begin{aligned}
& J_{b1}\ddot{\theta}_{b1} + c_{b1}b_1(\dot{y}_{b1} + \dot{\theta}_{b1}b_1 - \dot{y}_{t1}) - c_{b2}b_2(\dot{y}_{b1} - \dot{\theta}_{b1}b_2 - \dot{y}_{t2}) + k_{b1}b_1(y_{b1} + \theta_{b1}b_1 - y_{t1}) \\
& - k_{b2}b_2(y_{b1} - \theta_{b1}b_2 - y_{t2}) = 0
\end{aligned} \tag{3.2.8}$$

Arka boji lineer hareket denklemi (y_{b2}) aşağıdaki gibi ifade edilir.

$$\begin{aligned}
& m_{b2}\ddot{y}_{b2} - c_{s2}(\dot{y}_s - \dot{\theta}a_2 - \dot{y}_{b2}) + c_{b3}(\dot{y}_{b2} + \dot{\theta}_{b2}c_1 - \dot{y}_{t3}) + c_{b4}(\dot{y}_{b2} - \dot{\theta}_{b2}c_2 - \dot{y}_{t4}) \\
& - k_{s2}(y_s - \theta a_2 - y_{b2}) + k_{b3}(y_{b2} + \theta_{b2}c_1 - y_{t3}) + k_{b4}(y_{b2} - \theta_{b2}c_2 - y_{t4}) = 0
\end{aligned} \tag{3.2.9}$$

Arka boji dairesel hareket denklemi (θ_{b2}) aşağıdaki gibi ifade edilir.

$$\begin{aligned}
& J_{b2}\ddot{\theta}_{b2} + c_{b3}c_1(\dot{y}_{b2} + \dot{\theta}_{b2}c_1 - \dot{y}_{t3}) - c_{b4}c_2(\dot{y}_{b2} - \dot{\theta}_{b2}c_2 - \dot{y}_{t4}) + k_{b3}c_1(y_{b2} + \theta_{b2}c_1 - y_{t3}) \\
& - k_{b4}c_2(y_{b2} - \theta_{b2}c_2 - y_{t4}) = 0
\end{aligned} \tag{3.2.10}$$

Ön boji ön tekerleğinin lineer hareket denklemi (y_{t1}) aşağıdaki gibi ifade edilir.

$$\begin{aligned}
& m_{t1}\ddot{y}_{t1} - c_{b1}(\dot{y}_{b1} + \dot{\theta}_{b1}b_1 - \dot{y}_{t1}) + c_{t1}(\dot{y}_{t1} - \dot{y}_{r1}) - k_{b1}(y_{b1} + \theta_{b1}b_1 - y_{t1}) \\
& + k_{t1}(y_{t1} - y_{r1}) = 0
\end{aligned} \tag{3.2.11}$$

Ön boji arka tekerleğinin lineer hareket denklemi (y_{t2}) aşağıdaki gibi ifade edilir.

$$\begin{aligned}
& m_{t2}\ddot{y}_{t2} - c_{b2}(\dot{y}_{b1} - \dot{\theta}_{b1}b_2 - \dot{y}_{t2}) + c_{t2}(\dot{y}_{t2} - \dot{y}_{r2}) - k_{b2}(y_{b1} - \theta_{b1}b_2 - y_{t2}) \\
& + k_{t2}(y_{t2} - y_{r2}) = 0
\end{aligned} \tag{3.2.12}$$

Arka boji ön tekerleğinin lineer hareket denklemi (y_{t3}) aşağıdaki gibi ifade edilir.

$$\begin{aligned}
& m_{t3}\ddot{y}_{t3} - c_{b3}(\dot{y}_{b2} + \dot{\theta}_{b2}c_1 - \dot{y}_{t3}) + c_{t3}(\dot{y}_{t3} - \dot{y}_{r3}) - k_{b3}(y_{b2} + \theta_{b2}c_1 - y_{t3}) \\
& + k_{t3}(y_{t3} - y_{r3}) = 0
\end{aligned} \tag{3.2.13}$$

Arka boji arka tekerleğinin lineer hareket denklemi (y_{t4}) aşağıdaki gibi ifade edilir.

$$\begin{aligned}
& m_{t4}\ddot{y}_{t4} - c_{b4}(\dot{y}_{b2} + \dot{\theta}_{b2}c_2 - \dot{y}_{t4}) + c_{t4}(\dot{y}_{t4} - \dot{y}_{r4}) - k_{b4}(y_{b2} + \theta_{b2}c_2 - y_{t4}) \\
& + k_{t4}(y_{t4} - y_{r4}) = 0
\end{aligned} \tag{3.2.14}$$

Köprünün matematiksel modelinin oluşturulmasında Euler-Bernoulli kiriş teorisi kullanılmıştır. Euler-Bernoulli kiriş teorisi' ne göre üzerinde hareketli bir Q yükü bulunan esnek bir köprünün hareket denklemi aşağıda Denklem (3.2.15) ile verilmiştir.

$$EI \frac{\partial^4 Z_r(x,t)}{\partial x^4} + \rho \frac{\partial^2 Z_r(x,t)}{\partial t^2} + \mu \frac{\partial Z_r(x,t)}{\partial t} = -Q(x,t)\delta(x-vt) \tag{3.2.15}$$

Denklem (3.2.15)'de, EI köprünün rijitliğini, ρ köprünün birim uzunluktaki kütleini, μ köprünün birim uzunluktaki sönüm katsayısını, Q çubuğun üzerinde oluşan toplam kuvvet etkileşimini, Z_r tren köprü üzerinde ilerlerken t zamanında köprünün dikey yer değiştirmesini ve δ Dirac fonksiyonunu temsil etmektedir. Modeli oluşturulan sistemde dinamik kuvvetler trenin ön boji ön tekerleği ile arka boji arka tekerleğinin köprüden geçişi sırasında meydana gelmektedir. Trenin köprüden geçişi sırasında köprüde meydana gelen zorlanma Denklem (3.2.16)'da verilen parçalı fonksiyon ile ifade edilmiştir.

$$\int_{a^1}^{a^2} f(x) \delta(x-t) = \begin{cases} 0, & t < a^1 \\ f(t), & a^1 \leq t \leq a^2 \\ 0, & t > a^2 \end{cases} \quad (3.2.16)$$

Denklem (3.1.16)'da a^1 ön boji ön tekerleğinin köprü üzerine giriş zamanını, a^2 arka boji arka tekerleğinin köprü üzerine giriş zamanını temsil etmektedir.

Köprünün dikey yöndeki yer değiştirmesini ifade edilirken Galerkin yöntemi kullanılmıştır. Galerkin yöntemine göre köprünün dikey yöndeki yer değiştirmesi Denklem (3.2.17) ile verilmiştir.

$$Z_r(x,t) = \sum_{i=1}^N \tilde{\phi}_i(x) \eta_i(t) \quad (3.2.17)$$

Denklem (3.2.17) içinde $\tilde{\phi}_i$ Köprünün karakteristik fonksiyonunu (i.e., salınım mod şekli), η_i rayın elastik deformasyonunu temsil etmektedir. Köprünün karakteristik denklemini aşağıdaki gibi ifade edilir.

$$\tilde{\phi}_i(x) = A \sin \frac{i\pi x}{L}, \quad i = 1, 2, 3, \dots \quad (3.2.18)$$

Denklem (3.2.18)'de köprünün karakteristik denklemini sinüs fonksiyonu şeklinde ifade edilmektedir. Bu eşitlikte L köprü uzunluğunu belirtmektedir. Köprünün düşey yöndeki yer değiştirmesini ifade eden Denklem (3.2.17), Denklem (3.2.15)'de yerine yazılarak köprünün hareket denklemini elde edilmiştir. Ara işlem olarak da Denklem (3.2.17)'nin birinci ve ikinci dereceden zamana bağlı türevi ve dördüncü dereceden yola bağlı türevi hesaplanmıştır. Ara işlem sonucu bulunan denklemler aşağıda verilmiştir.

$$\dot{y}_b(x,t) = \sum_{i=1}^n \varphi_i(x) \dot{\eta}_i(t), \quad (3.2.19)$$

$$y_b^{(4)}(x,t) = \sum_{i=1}^n \varphi_i^{(4)}(x) \eta_i(t), \quad (3.2.20)$$

$$\dot{y}_b(x,t) = \sum_{i=1}^n \varphi_i(x) \dot{\eta}_i(t), \quad (3.2.21)$$

Yukarıda verilen Denklemler (3.1.19-2.1.21), Denklem (3.1.15)'de verilen köprünün hareket denkleminde yerine yazılarak köprünün hareket denklemi yeniden yazılmıştır. Elde edilen hareket denklemi Denklem (3.1.22)'de verilmiştir.

$$EI \sum_{i=1}^N \varphi_i^{(4)}(x) \eta_i(t) + \rho \sum_{i=1}^N \varphi_i(x) \ddot{\eta}_i(t) + \mu \sum_{i=1}^N \varphi_i(x) \dot{\eta}_i(t) = -F(x,t) \delta(x-vt) \quad (3.2.22)$$

Denklem (3.1.22) içinde verilen ifadelerin integralleri alınarak Denklem (3.1.23)'de verilen ortagonallik özellikleri ile birlikte Denklem (3.1.22) yeniden yazılmıştır. Denklem (3.1.22) için kullanılan Ortagonallik özellikleri şu şekilde ifade edilir:

$$\int_0^L \varphi_n(x) \sum_{i=1}^N \varphi_i(x) \eta_i(t) dx = \begin{cases} 0 & i = n \\ \int_0^L \varphi_n^2(x) dx \cdot \eta_n(t) & i \neq n \end{cases} \quad (3.2.23)$$

Bu işlemler sırasında Denklem (3.2.18)'deki A değeri köprünün parametrelerine göre bulunarak yerine yazılmıştır. Elde edilen denklem aşağıda verilmiştir.

$$\varphi_i(x) = \sqrt{\frac{2}{\rho L}} \sin \frac{n\pi x}{L} \quad (3.2.24)$$

Son olarak elde edilen hareket denklemi Denklem (3.2.25)'de verilmiştir.

$$\ddot{\eta}_n + 2\zeta_n \omega_n \dot{\eta}_n + \omega_n^2 \eta_n = -F_1(t) \phi_{1n} \delta_1 - F_2(t) \phi_{2n} \delta_2 - F_3(t) \phi_{3n} \delta_3 - F_4(t) \phi_{4n} \delta_4 \quad (3.2.25)$$

Denklem (2.1.25)'de verilen ifade içinde parametre ζ_n köprünün sönüm oranını ve ω_n köprünün doğal frekansını ifade etmektedir. Eşitliğin sağ tarafında dört adet kuvvet bulunmaktadır. Bu kuvvetler trenin köprü üzerindeki hareketi esnasında tekerleklere etki eden kuvvetleri temsil etmektedir. Bu kuvvetler dolayısıyla ortaya çıkan düşey yer değiştirmeler her tekerlek için farklı olacaktır. Bu sebeple köprünün düşey yer değiştirmeleri her tekerlek için ayrı ayrı hesaplanarak denkleme dâhil edilmiştir. Hesaplanan düşey yer değiştirmeler Denklemler (3.1.26-3.1.29)'da verilmiştir.

$$\phi_n = \phi_n(vt) = \sqrt{\frac{2}{\rho L}} \sin \frac{n\pi vt}{L} \quad (3.2.26)$$

$$\phi_{2n} = \phi_n(vt-b) = \sqrt{\frac{2}{\rho L}} \sin \frac{n\pi(vt-b)}{L} \quad (3.2.27)$$

$$\phi_{3n} = \phi_n (vt - (a + b_1 - c_1)) = \sqrt{\frac{2}{\rho L}} \sin \frac{n\pi (vt - (a + b_1 - c_1))}{L} \quad (3.2.28)$$

$$\phi_{4n} = \phi_n (vt - (a + b_1 + c_2)) = \sqrt{\frac{2}{\rho L}} \sin \frac{n\pi (vt - (a + b_1 + c_2))}{L} \quad (3.2.29)$$

Yukarıda verilen eşitliklerde ϕ_{1n} ön boji ön tekerleğin düşey yer değiştirmesini, ϕ_{2n} ön boji arka tekerleğin düşey yer değiştirmesini, ϕ_{3n} arka boji ön tekerleğin düşey yer değiştirmesini ve ϕ_{4n} arka boji arka tekerleğin düşey yer değiştirmesini temsil etmektedir. Denklem (3.1.25)'de verilen Dirac-Delta fonksiyonları da dikey yer değiştirmeler gibi her tekerlek için farklı olur. Bu sebeple her tekerlek için Dirac-Delta fonksiyonları ayrı ayrı bulunarak genel denkleme dâhil edilmiştir. Hesaplanan Dirac-Delta fonksiyonları Denklemler (3.1.30-3.1.33)'de verilmiştir.

$$\delta_1(t) = \begin{cases} 1 & 0 \leq t \leq \frac{l}{v} \\ 0 & \text{else} \end{cases} \quad (3.2.30)$$

$$\delta_2(t) = \begin{cases} 1 & \frac{b}{v} \leq t \leq \frac{l+b}{v} \\ 0 & \text{else} \end{cases} \quad (3.2.31)$$

$$\delta_3(t) = \begin{cases} 1 & \frac{a+b_1-c_1}{v} \leq t \leq \frac{l+a+b_1-c_1}{v} \\ 0 & \text{else} \end{cases} \quad (3.2.32)$$

$$\delta_4(t) = \begin{cases} 1 & \frac{a+b_1+c_2}{v} \leq t \leq \frac{l+a+b_1+c_2}{v} \\ 0 & \text{else} \end{cases} \quad (3.2.33)$$

Yukarıda verilen eşitliklerde $\delta_1(t)$ ön boji ön tekerleğin Dirac-Delta fonksiyonunu $\delta_2(t)$ ön boji arka tekerleğin Dirac-Delta fonksiyonunu, $\delta_3(t)$ arka boji ön tekerleğin Dirac-Delta fonksiyonunu ve $\delta_4(t)$ arka boji arka tekerleğin Dirac-Delta fonksiyonunu ifade etmektedir. Tekerleklerin hareketini temsil eden düşey yer değiştirme ve Dirac-Delta fonksiyonları bulunduktan sonra trenin hareketi sırasında köprüde oluşan ve trenin tekerleklerine etki eden tepki kuvvetleri bulunmuştur.

Köprüde oluşan ve trenin tekerleklerine etki eden iki adet kuvvet bulunmaktadır. Bunlardan birisi tekerleğin statik yükü ve tren gövdesinin tekerleğe etki eden kuvveti, diğeri de tekerleğin geçişi sırasında oluşan elastisite ve köprüye etki eden titreşim etkisidir. Trende meydana gelen statik kuvvetler Denklem (3.1.34)'de verilmiştir.

$$\sum_{i=1}^4 F_i(x_i, t) = W_i - c_{ii}(\dot{y}_{ii} - \dot{y}_{ri}) - k_{ii}(y_{ii} - y_{ri}) \quad (3.2.34)$$

Denklem (34)'de W_i ile tekerleğe etki eden statik yükü, diğer ifadeyle ise tekerleğin geçişi sırasında köprüye etki eden titreşim etkisi temsil edilmektedir. Tekerleklere etki eden toplam kuvveti bulmak için her bir tekerleğe etki eden statik yük ve titreşim etkisi hesaplanmıştır. Tekerleklere etki eden statik yük denklemleri Denklemler(3.1.35-3.1.38)'deki gibi ifade edilmiştir.

$$W_1 = \left[\left[m_s \left(\frac{a_2}{a} \right) + m_{b1} \right] \left(\frac{b_2}{b} \right) + m_{t1} \right] g \quad (3.2.35)$$

$$W_2 = \left[\left[m_s \left(\frac{a_2}{a} \right) + m_{b1} \right] \left(\frac{b_1}{b} \right) + m_{t2} \right] g \quad (3.2.36)$$

$$W_3 = \left[\left[m_s \left(\frac{a_1}{a} \right) + m_{b2} \right] \left(\frac{c_2}{c} \right) + m_{t3} \right] g \quad (3.2.37)$$

$$W_4 = \left[\left[m_s \left(\frac{a_1}{a} \right) + m_{b2} \right] \left(\frac{c_1}{c} \right) + m_{t4} \right] g \quad (3.2.38)$$

Her bir tekerleğe etki eden statik kuvvetler yukarıdaki eşitlikler ile verilmiştir. Burada W_1 ön boji ön tekerleğe etki eden statik yükü, W_2 ön boji arka tekerleğe etki eden statik yükü, W_3 arka boji ön tekerleğe etki eden statik yükü ve W_4 arka boji arka tekerleğe etki eden statik yükü ifade etmektedir. Tekerleklere etki eden ikinci etki olan titreşim hareketi etkisi Denklemler (3.1.39-3.1.42)'de verilmiştir. Bu denklemlerde alt indis 1' den 4 'e kadar olan etkiler sırasıyla ön boji ön tekerleği, ön boji arka tekerleği, arka boji ön tekerleği ve arka boji arka tekerleğini temsil etmektedir.

$$\left[c_{t1}(\dot{y}_{t1} - \dot{y}_{r1}) + k_{t1}(y_{t1} - y_{r1}) = -m_{t1}\ddot{y}_{t1} - \frac{b_2}{b} m_{b1}\ddot{y}_{b1} - \frac{a_2 b_2}{ab} m_s \ddot{y}_s - \frac{b_2}{b} \frac{J\ddot{\theta}}{a} - J_{b1}\ddot{\theta}_{b1} \right] \quad (3.2.39)$$

$$\left[c_{t2}(\dot{y}_{t2} - \dot{y}_{r2}) + k_{t2}(y_{t2} - y_{r2}) = -m_{t2}\ddot{y}_{t2} - \frac{b_1}{b} m_{b1}\ddot{y}_{b1} - \frac{b_1 a_2}{b a} m_s \ddot{y}_s - \frac{b_1}{b} \frac{J\ddot{\theta}}{a} + \frac{J_{b1}\ddot{\theta}_{b1}}{b} \right] \quad (3.2.40)$$

$$\left[c_{t3}(\dot{y}_{t3} - \dot{y}_{r3}) + k_{t3}(y_{t3} - y_{r3}) = -m_{t3}\ddot{y}_{t3} - \frac{c_2}{c} m_{b2}\ddot{y}_{b2} - \frac{c_2}{c} m_s \ddot{y}_s + \frac{c_2}{ac} J\ddot{\theta}_s - \frac{J_{b2}\ddot{\theta}_{b2}}{c} \right] \quad (3.2.41)$$

$$\left[c_{t4}(\dot{y}_{t4} - \dot{y}_{r4}) + k_{t4}(y_{t4} - y_{r4}) = -m_{t4}\ddot{y}_{t4} - \frac{c_1}{c} m_{b2}\ddot{y}_{b2} - \frac{a_1 c_1}{ac} m_s \ddot{y}_s + \frac{c_1}{ac} J\ddot{\theta}_s + \frac{J_{b2}\ddot{\theta}_{b2}}{c} \right] \quad (3.2.42)$$

Son olarak Denklemler (3.1.43-3.1.45)'de tekerleklere etki eden statik ve titreşim hareketi etkisinden kaynaklanan kuvvetler her tekerlek için ayrı ayrı olarak hesaplanmıştır.

$$F_1(x_1, t) = W_1 + m_{t1} \ddot{y}_{t1} + \frac{b_2}{b} m_{b1} \ddot{y}_{b1} + \frac{a_2 b_2}{ab} m_s \ddot{y}_s + \frac{b_2}{b} \frac{J \ddot{\theta}}{a} + J_{b1} \ddot{\theta}_{b1} \quad (3.2.43)$$

$$F_2(x_2, t) = W_2 + m_{t2} \ddot{y}_{t2} + \frac{b_1}{b} m_{b1} \ddot{y}_{b1} + \frac{b_1 a_2}{b a} m_s \ddot{y}_s + \frac{b_1}{b} \frac{J \ddot{\theta}}{a} - \frac{J_{b1} \ddot{\theta}_{b1}}{b} \quad (3.2.44)$$

$$F_3(x_3, t) = W_3 + m_{t3} \ddot{y}_{t3} + \frac{c_2}{c} m_{b2} \ddot{y}_{b2} - \frac{c_2}{ac} J \ddot{\theta} + \frac{c_2}{c} m_s \ddot{y}_s + \frac{J_{b2} \ddot{\theta}_{b2}}{c} \quad (3.2.45)$$

$$F_3(x_3, t) = W_3 + m_{t3} \ddot{y}_{t3} + \frac{c_2}{c} m_{b2} \ddot{y}_{b2} - \frac{c_2}{ac} J \ddot{\theta} + \frac{c_2}{c} m_s \ddot{y}_s + \frac{J_{b2} \ddot{\theta}_{b2}}{c} \quad (3.2.46)$$

Tekerlekler için bulunan kuvvetler genel denklemde yerine yazılarak TKE modelinin en genel hareket denklemi elde edilmiştir. Sonuçta bulunan denklem TKE probleminin matematiksel modelini ifade etmektedir.

$$\begin{aligned} & \left[\phi_{1n} \delta_1 \left(\frac{a_2 b_2}{ab} \right) + \phi_{2n} \delta_2 \left(\frac{a_2 b_1}{ab} \right) + \phi_{3n} \delta_3 \left(\frac{c_2}{c} \right) + \phi_{4n} \delta_4 \left(\frac{c_1}{ac} \right) \right] m_s \ddot{y}_s \\ & + \left[\frac{\phi_{1n} \delta_1 b_2 + \phi_{2n} \delta_2 b_1}{ab} + \frac{-c_2 \phi_{3n} \delta_3 + a_1 c_1 \phi_{4n} \delta_4}{ac} \right] J \ddot{\theta} \\ & + \left[\phi_{1n} \delta_1 \frac{b_2}{b} + \phi_{2n} \delta_2 \frac{b_1}{b} \right] m_{b1} \ddot{y}_{b1} + \left[\phi_{1n} \delta_1 - \frac{\phi_{2n} \delta_2}{b} \right] J_{b1} \ddot{\theta}_{b1} \\ & + \left[\phi_{3n} \delta_1 \frac{c_2}{c} + \phi_{4n} \delta_2 \frac{c_1}{c} \right] m_{b2} \ddot{y}_{b2} + \left(\phi_{3n} \delta_3 - \frac{\phi_{4n} \delta_4}{c} \right) J_{b2} \ddot{\theta}_{b2} + \sum_{i=1}^4 \phi_{in} \delta_i m_{ii} \ddot{y}_{ii} \\ & + \ddot{\eta}_n + 2\zeta_n \omega_n \dot{\eta}_n + \omega_n^2 \eta_n = -[W_1 \phi_{1n} \delta_1 + W_2 \phi_{2n} \delta_2 + W_3 \phi_{3n} \delta_3 + W_4 \phi_{4n} \delta_4] \end{aligned} \quad (3.2.47)$$

Elde edilen matematiksel modelin matris denklemi Denklem (3.1.48)'de verilmiştir.

$$[\mathbf{M}_G] \{\ddot{\mathbf{Z}}_G\} + [\mathbf{C}_G] \{\dot{\mathbf{Z}}_G\} + [\mathbf{K}_G] \{\mathbf{Z}_G\} = \{\mathbf{Q}_G\} \quad (3.2.48)$$

Denklem (3.2.48)' de $[\mathbf{M}_G]$ sistemin genel kütle matrisini, $[\mathbf{C}_G]$ sönüm matrisini, $[\mathbf{K}_G]$ direngenlik matrisini ve $[\mathbf{Q}_G]$ kuvvet matrisini ifade etmektedir. Matrisler EKA' da verilmiştir

BÖLÜM 4. NÜMERİK ANALİZ

Denklem (2.1.47)'de verilen ikinci dereceden diferansiyel denklem TKE probleminin genel hareket denklemidir. Nümerik analiz için Denklem (2.1.48)'deki ifade matris formatına dönüştürülmüştür. Nümerik analizde Newmark- β yöntemi kullanılmıştır.

Köprü titreşimleri dört adet mod'dan oluşmaktadır. Bu modlar titreşim hareketinin karakteristiğini ifade etmektedir. Kullanılan Newmark- β yöntemi ile, belirlenen dört farklı titreşim karakteristiği için köprü hareketi analiz edilmiştir.

İlk olarak modelin yer değiştirme($[\mathbf{X}]$), hız($[\mathbf{V}]$) ve ivme($[\mathbf{A}]$) matrisleri başlangıç elemanları sıfır olacak şekilde oluşturulmuştur. Daha sonra oluşturulan kütle($[\mathbf{M}]$), direngenlik($[\mathbf{K}]$), sönüm($[\mathbf{C}]$) ve kuvvet($[\mathbf{Q}]$) matrislerinin bağımsız değişken ve yer değiştirme, hız ve ivme matrislerinin bağımlı değişken olarak kullanıldığı bir denklem sistemi elde edilmiştir. Elde edilen denklem sistemi Denklemler (4.1-4.3)'de verilmiştir.

$$[\mathbf{X}](t) = [\mathbf{X}](t-1) + [\mathbf{V}](t)dt + \frac{1}{2}[\mathbf{A}](t-1)^2 \quad (4.1)$$

$$[\mathbf{V}](t) = [\mathbf{V}](t-1) + [\mathbf{A}](t-1)dt \quad (4.2)$$

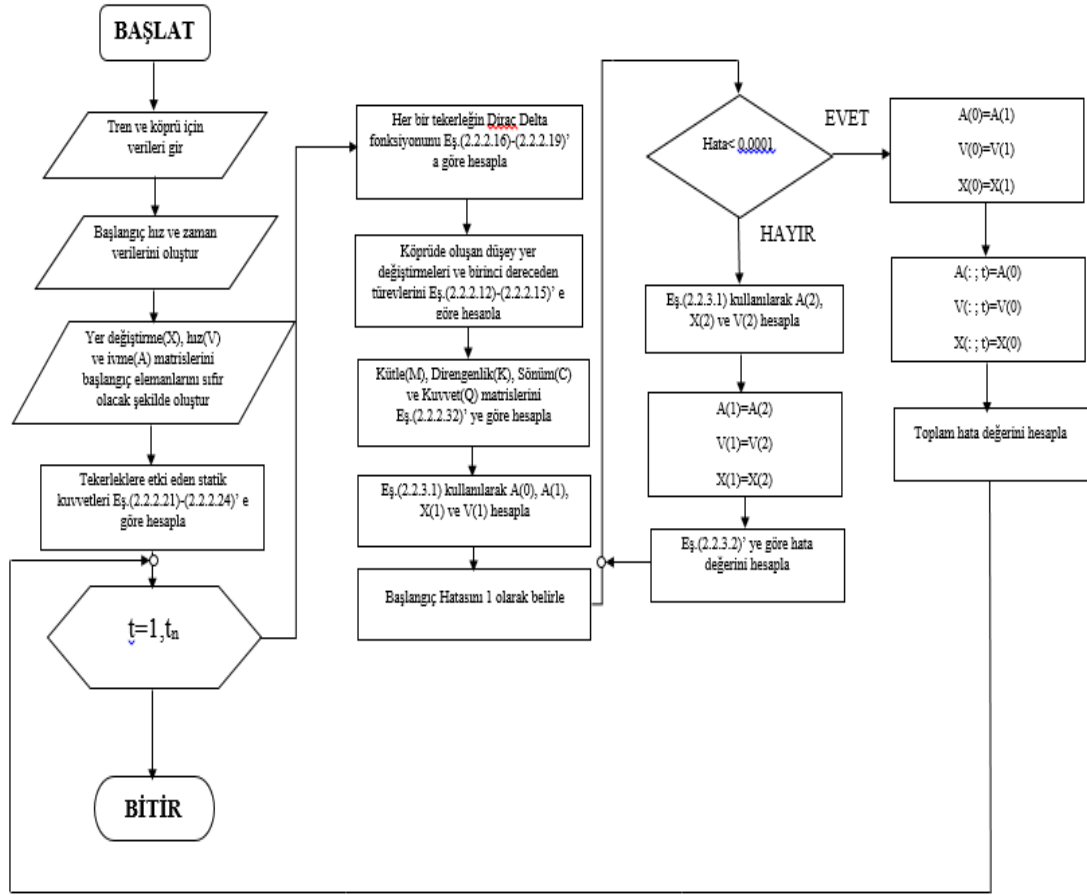
$$[\mathbf{A}](t) = \frac{[\mathbf{M}]}{[\mathbf{Q}] - [\mathbf{C}][\mathbf{V}](t) - [\mathbf{K}][\mathbf{X}](t)} \quad (4.3)$$

Denklemler (4.1-4.3)'de verilen denklem sisteminde belirlenen zaman aralığında iterasyon işlemi uygulanarak istenilen zamana kadar belirli bir hata koşulu verilerek ivme, hız ve yer değiştirme matrisleri oluşturulmuştur. Zamana bağlı hata fonksiyonu Denklem (4.4)'de verilmiştir.

$$HATA = \frac{\sum \left| [\mathbf{A}](t) - [\mathbf{A}](t-1) \right|}{\sum [\mathbf{A}](t)} \quad (4.4)$$

Oluşturulan matrisler 14x14 boyutuna sahiptir. Tren modelinin 10 serbestlik dereceli olarak ve köprü modelinin mod sayısı 4 olarak belirlenmiştir. Nümerik analiz sonucunda

tren köprü etkileşimi modelindeki aşağıda verilen değişken parametrelerin zamana göre değişimleri incelenmiş ve modelin hareketinin analizi tamamlanmıştır. Modelin analiz algoritması Şekil 4.1’ de verilmiştir.



Şekil 4.1: Analiz algoritması.

4.1. Köprünün Mod Frekansları Ve Tren Kritik Hız

HST'nin köprü üzerindeki hareketi köprüyü titreşim hareketi oluşturmaya zorlamaktadır. Bazı özel hızlarda HST ve köprü rezonansa girerek köprü salınımlarını arttırmakta ve bu durum yolcu güvenliği için tehdit oluşturmaktadır. Mod frekansları köprünün farklı türden titreşimlerdeki doğal frekansları olarak ifade edilir. Bu çalışmada köprüye ait 4 farklı mod frekansı bulunmaktadır. HST ile köprünün doğal frekansları HST'nin belirli bir hızı için aynı olur ve bunun sonucunda HST ile köprü rezonansa girer. HST ile köprünün rezonansa girmesini sağlayan hıza kritik hız denir (Koç, 2017)

Basit mesnetli köprünün doğal frekansı Denklem (4.1.1) ile aşağıda verilmiştir.

$$f_j = \frac{j^2 \pi}{2L^2} \left(\frac{EI}{\mu} \right)^{1/2} \text{ (Hz.)} \quad (4.1.1)$$

Denklem(4.1)'de verilen ifadede f_j mod frekansını(Hertz), j kaçınıcı mod olduğunu, EI köprünün esnemezliğini, μ köprünün birim uzunluğunun kütlesini ve L köprü boyunu ifade etmektedir. Tablo 3.1.2'de verilen parametre değerleri Denklem(5.1)'de yerine yazılarak mod frekansları hesaplanır. Dört ayrı mod için mod frekans ve kritik hız değerleri Tablo 4.1.1' de verilmiştir.

Tren kritik hız denklemi Denklem(4.1.2) ile aşağıda verilmiştir

$$v_{cr,j} = \frac{df_j}{i} \quad (4.1.2)$$

Yukarıda verilen denklemde v_{cr} tren kritik hızını (m/s), d tren boyunu(m), f_j köprünün j ' inci mod frekansını (Hertz) ve i j ' inci mod frekansındaki yarı salınım periyodunu(m) ifade etmektedir.

Tablo 4.1.1 : Dört mod için mod frekansları ve kritik hızlar

Mod (i)	Mod Frekansı (f_j)	Kritik Hız(v_{cr})
1	2,60905	52,181
2	10,43623	208,7246
3	23,48153	469,6306
4	41,74495	834,899

BÖLÜM 5. ANALİZ SONUÇLARI

Bölüm 3’de matematiksel modeli oluşturulan 10-SD HST etkisi altındaki basit mesnetli esnek köprünün nümerik analizi Newmark- β yöntemi kullanılarak tamamlandı. Analizde Tablo 3.1.2’de verilen parametre değerleri kullanıldı. Analize başlamadan önce hareketli oslitör modeli kullanılarak sayısal doğrulama yapıldı. Analiz MATLAB ortamında özel bir yazılım ile yapıldı ve analiz sonucunda 5 farklı parametre(tren gövdesinin kütlesi, tren hızı, köprü uzunluğu, tren aks mesafesi ve sönüm oranı) göz önünde bulundurularak tren gövdesinin yer değiştirmesi, köprü orta noktasının yer değiştirmesi, tren gövdesinin ivmesi ve köprü orta noktasının ivmesi incelendi. Analizde tren hızı 300 km/h olarak belirlendi.

5.1. Sayısal Doğrulama

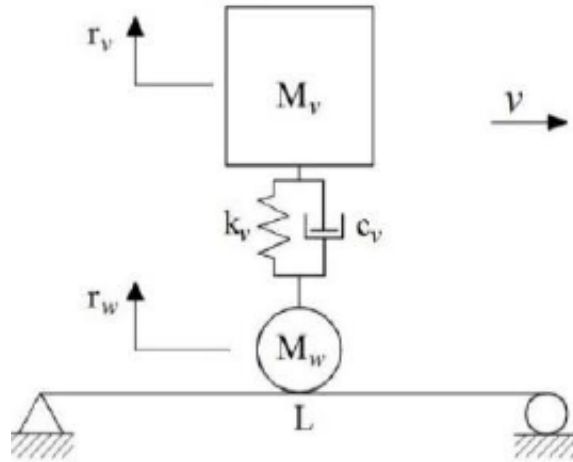
Mühendislik tasarımında bilgisayar metotları yaygın olarak kullanılmaktadır. Mühendislik probleminin doğrulamasını yapılırken deneysel yöntemlerin yerine bu metotlar kullanılmaktadır. Deneysel metotlar, özellikle bazı mühendislik problemlerinin doğrulamasını yapmak için oldukça pahalı, zaman alıcı olabilmektedir. Bu durumlarda deneysel metotların yerine bilgisayar metotları daha avantajlı olmaktadır. Statik analiz, plastik deformasyon ve serbest titreşimler gibi mühendislik konularının bilgisayar ortamında modellenmesi ve analizi oldukça iyi gerçekleştirilebilmektedir. Buna karşın, hareketli yük ve bu yükün sahip olduğu atalet etkilerinin analizinde bilgisayar metotları yetersiz kalmaktadır. Tasarım mühendisleri bu tarz problemlerin çözümünde bir takım basitleştirmeler ile analitik yöntemler kullanmış ve sonuç olarak da problemleri çözmeyi başarmışlardır. Bu basitleştirmeler eğer hareketli yük yapının dinamik karakteristiğini değiştiremeyecek kadar küçük olduğu durumlarda kabul edilebilecek bir durumdur. Fakat ataletli yük söz konusu

olduğunda geliştirilen bu analitik yöntemlerin yetersiz olduğu görülmektedir (Koç 2017).

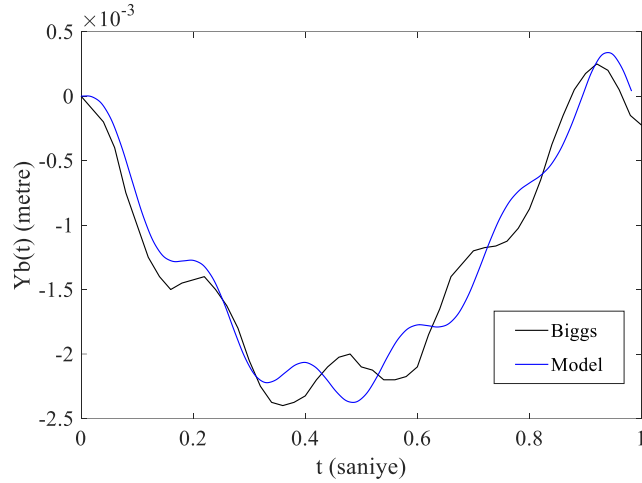
Bu bölümde, bölüm 3'te verilen matematiksel modelin sayısal doğrulanmasının yapılması amacıyla literatürde daha önce yapılmış diğer yöntemler karşılaştırılması sunulmuştur. Karşılaştırılması yapılan model, literatürde üzerinde en fazla çalışılmış modellerden biri olan hareketli ossilatör modelidir.

5.1.1. Hareketli osilatör modeli

Bölüm 2'de anlatılan teorinin doğruluğunu ispatlamak amacıyla Şekil 5.1.1'de gösterilen üzerinde hareketli kütle yay modelinin geçtiği basit mesnetli Euler-Bernoulli kirişini ele alalım. Bu örnek modelde kirişin elastisite modülü $E=2,87$ GPa, kesit alanı atalet momenti $I=2,90$ m⁴, kiriş birim uzunluğu kütlesi $\mu=2303$ kg/m, kiriş uzunluğu $L=25$ m, köprünün eşdeğer sönüm katsayısı $c=1750$ Ns/m, yay kütlesi $M_v=5,75$ ton, tekerlek kütlesi $M_w=0$, süspansiyon sabit yay katsayısı $k_v=1595$ kN/m, kütle hızı $v=27,8$ m/s olarak kabul edilmiştir. Sistemde herhangi bir sönümlenme elemanı kullanılmamıştır ($c_v=0$). Şekil 5.1.1'de hareketli ossiatör sisteminden elde edilen sonuçların analitik çözüm (Biggs 1964) ile karşılaştırılması gösterilmiştir. Elde edilen sonuçların bu iki teori ile gayet iyi bir şekilde eşleştiği görülmektedir.



Şekil 5.1.1: Hareketli osilatör modeli (Koç 2017)

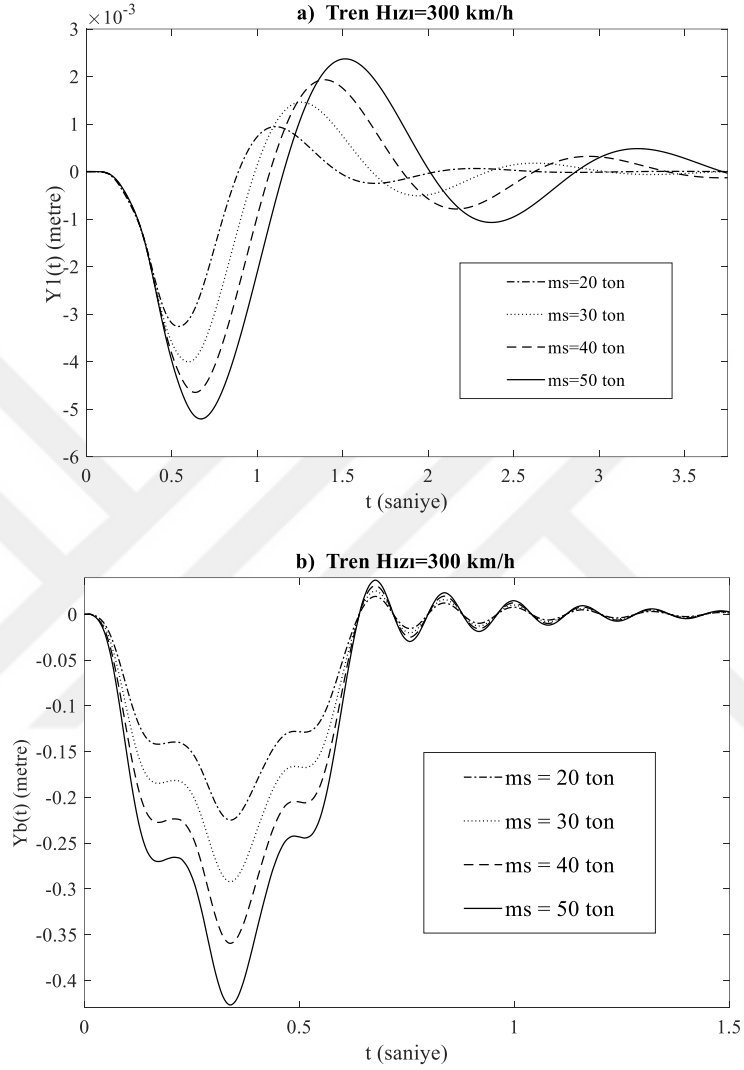


Şekil 5.1.2: Hareketi osilatör modeli için köprü orta noktası yer değiştirmesi

5.2. Tren Gövdesinin Kütlesinin(m_s) Trenin ve Köprü Dinamiği Üzerindeki Etkisi

Köprü üzerinde hareket eden trenin kütlesi, tren-köprü etkileşimine etki eden en önemli parametrelerden biridir. Bu bölümde 300 km/h hızda esnek bir köprü üzerinde hareket eden bir trende meydana gelen titreşimlerin köprü ve tren dinamiğine etkisi, tren gövdesinin kütlesine göre değişimi incelendi. Şekil 5.2.1(a) ve Şekil 5.2.1(b)'de sırasıyla tren gövdesi ve köprü orta noktasının yer değiştirmesinin grafikleri, Tablo 5.2.1 ve 5.2.2'de ise sırasıyla Şekil 5.2.1(a) ve Şekil 5.2.1(b)'de verilen grafiklerdeki maksimum genlik miktarı ve maksimum genliğe ulaştığı zaman ile ilgili tablo verilmiştir. Şekil 2(b)'de görüldüğü üzere, tren gövdesinin kütlesinin artmasıyla köprü orta noktasının yer değiştirmesi de artmaktadır. Tablo 5.1.2'de göre köprü orta noktasındaki maksimum artış ise 0,34'üncü saniyede meydana gelmektedir. Bu noktada tren ön ve arka bojileri köprü üzerindedir ve tren köprüyü henüz terk etmemiştir. Tren köprüden ayrıldıktan sonra ise köprü kaynaklı titreşim etkisinin ortadan kalkmasıyla titreşim genlikleri Şekil 5.2.1(a) ve (b)'de görüldüğü üzere azalmaya başlamaktadır. Şekil 5.2.1(a)'da görüldüğü üzere tren gövdesinin kütlesindeki artış tren gövdesi yer değiştirmesinde artışa sebep olmaktadır. Tablo 5.2.1'de $m_s = 20, 30, 40, 50$ ton için tren gövdesindeki maksimum yer değiştirmeler sırasıyla 3,27, 4, 4,65 ve 5,22 mm'dir. Bununla birlikte tren gövdesinin kütlesindeki artış tren gövdesindeki yer değiştirmenin meydana gelmesini de geciktirmektedir. $m_s = 20, 30, 40, 50$ ton için tren gövdesindeki maksimum yer değiştirmeler sırasıyla 0,54, 0,595, 0,63 ve 0,67'inci saniyelerde meydana geldiği Tablo 5.2.1'de görülmektedir.

Buradan da anlaşılacağı gibi, tren gövdesinin kütlesindeki artış, Şekil 5.2.1(b)'de görülen titreşim dalgalarındaki faz farklılıklarının bir sonucu olarak tren gövdesindeki yer değiştirme zamanında gecikmeye sebep olmaktadır.



Şekil 5.2.1: Tren gövdesinin kütlesinin (m_c) köprü ve tren dinamiği üzerindeki etkisinin karşılaştırılması: (a)Tren gövdesinin yer değiştirmesi(m) (b)Köprü orta noktasının yer değiştirmesi.

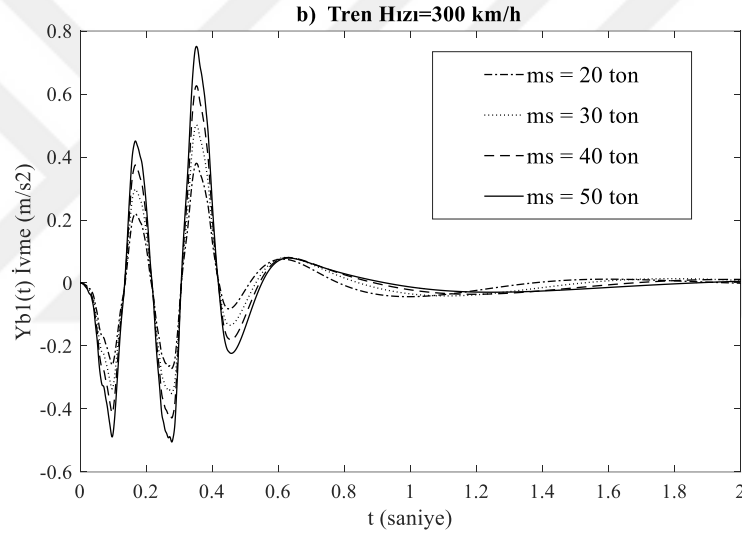
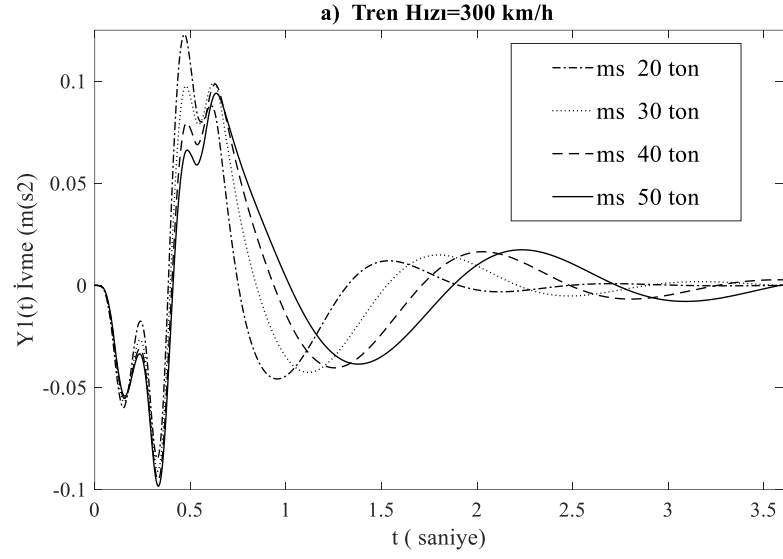
Tablo 5.2.1: Tren gövdesinin kütlelerinin değişiminin Şekil 5.2.1a 'deki grafiğin titreşim genliğine etkisi.

Tren Gövdesinin Kütleleri (ton)	Maksimum Genlik (m)	Maksimum Genliğe Ulaştığı Zaman (s)
20	0,00327	0,54
30	0,004	0,595
40	0,00465	0,63
50	0,00522	0,67

Tablo 5.2.2: Tren gövdesinin kütlelerinin değişiminin Şekil 5.2.1b 'deki grafiğin titreşim genliğine etkisi.

Tren Gövdesinin Kütleleri (ton)	Maksimum Genlik (m)	Maksimum Genliğe Ulaştığı Zaman (s)
20	0,2248	0.34
30	0,2921	0.34
40	0,3595	0.34
50	0,427	0.34

Şekil 5.2.2(a) ve (b)'de sırasıyla tren gövdesi ve köprü orta noktasının ivmelenmesinin grafikleri, Tablo 5.2.3 ve Tablo 5.2.4'de ise sırasıyla Şekil 5.2.1(a) ve (b)'de verilen grafiklerdeki maksimum genlik miktarı ve maksimum genliğe ulaştığı zaman ile ilgili tablo verilmiştir. Şekil 5.2.2(a)'da görüldüğü üzere tren gövdesinin kütlelerindeki artış tren gövdesi yer değiştirmesinde artışa sebep olmaktadır. Tablo 5.2.3'da $m_s = 20, 30, 40, 50$ ton için tren gövdesindeki maksimum ivmelenmeler sırasıyla 123, 99,3, 98,5 ve 98,38 mm/s^2 'dir. Şekil 5.2.2(b)'de ise tren gövdesinin kütlelerindeki artışın köprü orta noktası maksimum ivmelenmemeyi arttırdığı görülmektedir. Tablo 5.2.4'de $m_s = 20, 30, 40, 50$ ton için tren gövdesindeki maksimum ivmelenmeler sırasıyla 352,5, 501,5, 626,1 ve 751,3 mm/s^2 'dir. Maksimum ivmelenmeye ulaşılan zamanlar ise tren kütlelerinin değişiminden etkilenmemiştir. Tren kütlelerindeki artmasıyla tren gövdesinin ve köprü orta noktası ivmesi de artmaktadır. Bununla birlikte tren kütlelerindeki artış maksimum ivmelenmenin meydana gelmesinde gecikmeye yol açmaktadır. 0,64'üncü saniyeden sonra tren köprüden ayrılmıştır ve serbest titreşimlere maruz kalmıştır.



Şekil 5.2.2: Tren gövdesinin kütlesinin (m_c) tren dinamiği üzerindeki etkisinin karşılaştırılması:
(a)Tren gövdesinin ivmesi (m/s^2) ve (b) Köprü orta noktası ivmesi (m/s^2).

Tablo 5.2.3: Tren gövdesinin kütlesinin değişiminin Şekil 5.2.2a 'deki grafiğin titreşim genliğine etkisi.

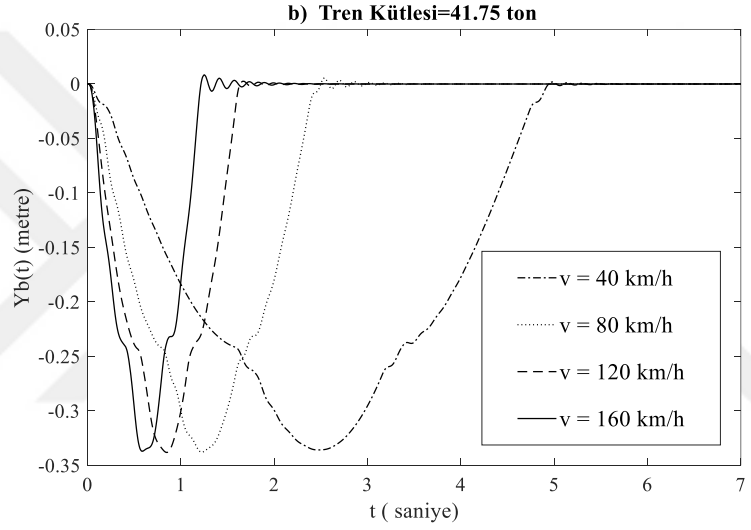
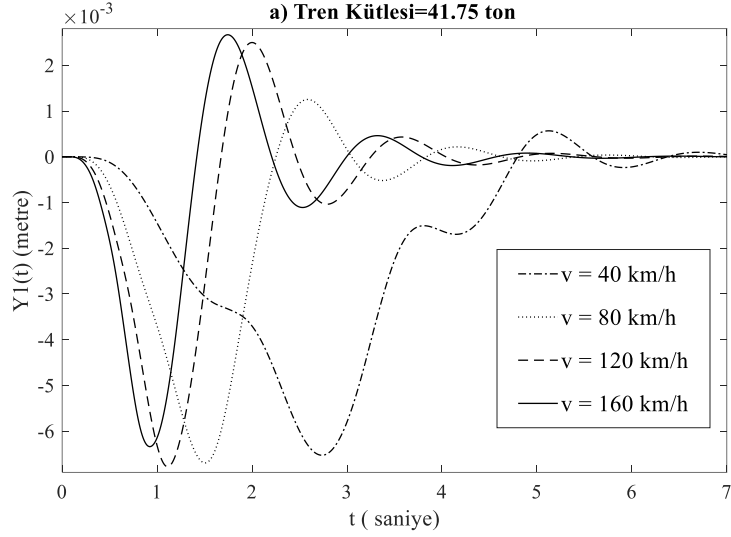
Tren Gövdesinin Kütlesi (ton)	Maksimum Genlik (m)	Maksimum Genliğe Ulaştığı Zaman (s)
20	0,123	0,4685
30	0,0993	0,6214
40	0,0985	0,6299
50	0,09838	0,3327

Tablo 5.2.4: Tren gövdesinin kütlelerinin değişiminin Şekil 5.2.2b 'deki grafiğin titreşim genliğine etkisi.

Tren Gövdesinin Kütleleri (ton)	Maksimum Genlik (m)	Maksimum Genliğe Ulaştığı Zaman (s)
20	0,3525	0,38
30	0,5015	0,3525
40	0,6261	0,3525
50	0,7513	0,3525

5.3. Tren Hızının(v) Tren ve Köprü Dinamiği Üzerindeki Etkisi

Köprü üzerinde hareket eden trenin kütlesi, tren-köprü etkileşimine etki eden önemli parametrelerden biri de köprü üzerinde hareket eden trenin hızıdır. Bu bölümde esnek bir köprü üzerinde hareket eden bir trende meydana gelen titreşimlerin köprü ve tren dinamiğine etkisinin tren hızına göre değişimi incelenmiştir. Şekil 5.3.1'de görüldüğü üzere, tren hızındaki artış, köprü orta noktasının yer değiştirmesinde gözle görülür bir değişikliğe sebep olmamıştır. Bununla birlikte tren hızının artışa bağlı olarak trenin maksimum yer değiştirmesinde gecikme meydana gelmektedir. Örneğin $v = 40, 80, 120, 160$ ton için tren gövdesindeki maksimum yer değiştirmeler sırasıyla 0,9, 1,1, 1,5 ve 2,7'inci saniyelerde meydana gelmiştir. Buradan da anlaşılabileceği gibi, tren gövdesinin hızındaki artış tren gövdesindeki yer değiştirme zamanında gecikmeye sebep olmaktadır.



Şekil 5.3.1: Tren hızının (v) köprü ve tren dinamiği üzerindeki etkisinin karşılaştırılması: (a)Tren gövdesinin yer değiştirmesi(m) (b)Köprü orta noktasının yer değiştirmesi.

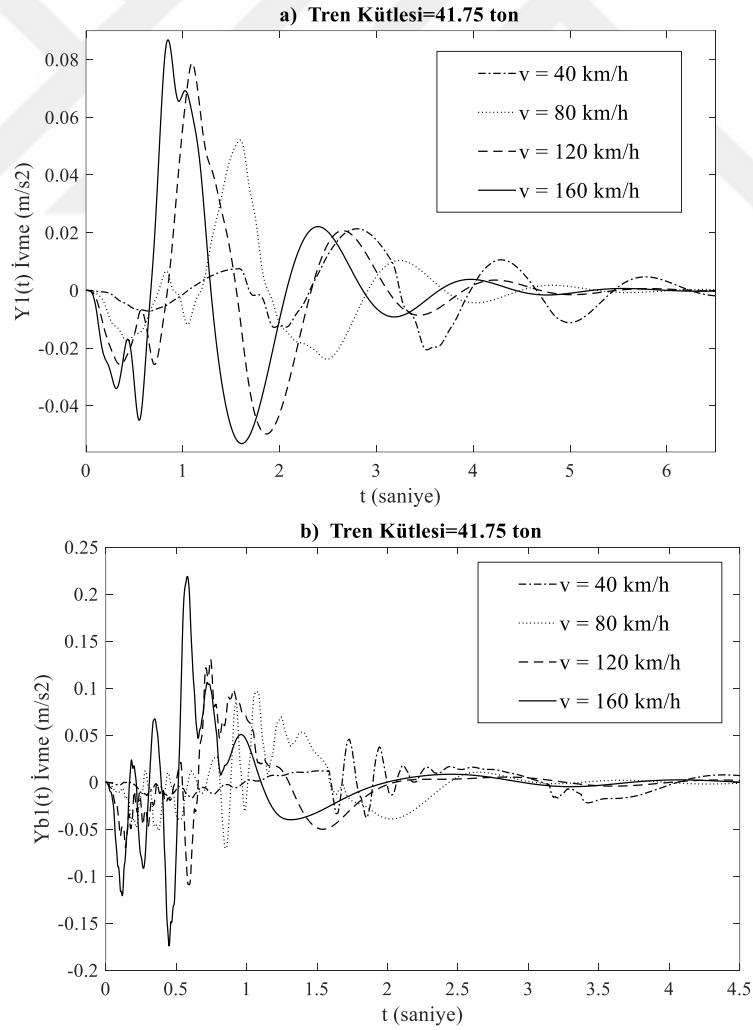
Tablo 5.3.1: Tren hızının değişiminin Şekil 5.3.1a 'deki grafiğin titreşim genliğine etkisi.

Tren Hızı (km/h)	Maksimum Genlik (m)	Maksimum Genliğe Ulaştığı Zaman (s)
40	0,00653	2,735
80	0,006697	1,51
120	0,006779	1,15
160	0,00634	0,922

Tablo 5.3.2: Tren hızının değişiminin Şekil 5.3.1b 'deki grafiğin titreşim genliğine etkisi.

Tren Hızı (km/h)	Maksimum Genlik (m)	Maksimum Genliğe Ulaştığı Zaman (s)
40	0,3358	2,47
80	0,3379	1,2234
120	0,3381	0,848
160	0,337	0,585

Şekil 5.3.2(a) ve (b)'de trenin 4 farklı hız değeri için, tren gövdesinin köprü orta noktası ivmelenmesi sırasıyla verilmiştir. Bu şekillerde görülebileceği gibi, tren kütlesindeki artmasıyla tren gövdesinin ve köprü orta noktası ivmesi de artmaktadır. Bununla birlikte tren hızındaki artış maksimum ivmelenmenin meydana gelmesinde gecikmeye yol açmaktadır.



Şekil 5.3.2: Tren hızının (v) tren dinamiği üzerindeki etkisinin karşılaştırılması: (a)Tren gövdesinin ivmesi (m/s^2) ve (b) Köprü orta noktası ivmesi (m/s^2).

Tablo 5.3.3: Tren hızının değişiminin Şekil 5.3.2a ‘deki grafiğin titreşim genliğine etkisi.

Tren Hızı (km/h)	Maksimum Genlik (m)	Maksimum Genliğe Ulaştığı Zaman (s)
40	0,2135	2,802
80	0,521	1,56
120	0,079	1094
160	0,08679	0.84

Tablo 5.3.4: Tren hızının değişiminin Şekil 5.3.2b ‘deki grafiğin titreşim genliğine etkisi.

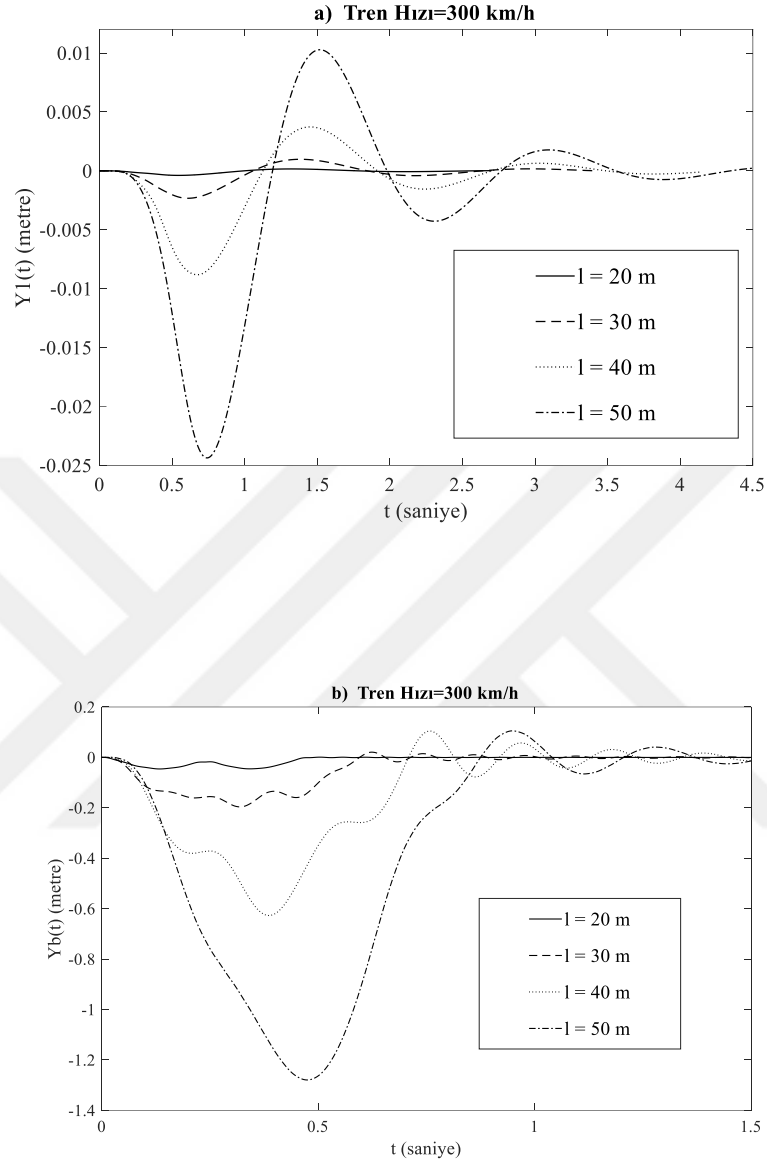
Tren Hızı (km/h)	Maksimum Genlik (m)	Maksimum Genliğe Ulaştığı Zaman (s)
40	1,7271	0,4579
80	0,0962	1,0806
120	0,1304	0,7444
160	0,22	0,58

5.4. Köprü Uzunluğunun(L) Ten ve Köprü Dinamiği Üzerindeki Etkisi

Bu çalışmada köprü uzunluğunun tren-köprü etkileşimine olan etkisi incelenmiştir. Şekil 5.4.1(a)’da, tren uzunluğunun artmasıyla tren gövdesinde oluşan maksimum yer değiştirmenin arttığı görülmektedir. Bununla birlikte tren uzunluğundaki artış tren gövdesinde oluşan titreşimlerde gözle görülür bir faz farkı yaratmamıştır. Şekil 5.4.1(b) incelendiğinde ise, köprü uzunluğunun köprü orta noktasının yer değiştirmesinde gözle görülür bir faz farkı meydana getirdiği görülmektedir.

Örneğin $l = 20, 30, 40$ ve 50 m için köprü orta noktasının maksimum yer değiştirmeler sırasıyla $0,46, 0,6, 0,7, 0,87$ ’inci saniyelerde meydana gelmiştir. Buna ek olarak köprü

uzunluğunun artmasıyla köprü orta noktasının maksimum yer değıştirmesi de artmaktadır.



Şekil 5.4.1: Tren uzunluğunun (l) tren dinamiği üzerindeki etkisinin karşılaştırılması: (a)Tren gövdesinin yer değıştirmesi (m) ve (b) Köprü orta noktasının yer değıştirmesi (m).

Tablo 5.4.1: Tren uzunluğunun Şekil 5.4.1a 'deki grafiğin titreşim genliğine etkisi.

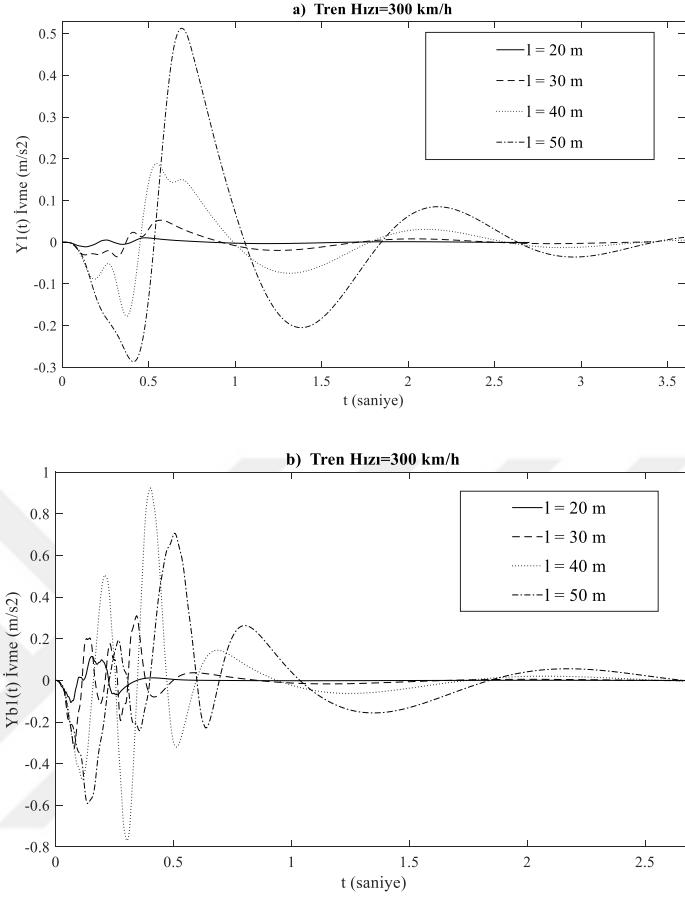
Köprü Uzunluğu (m)	Maksimum Genlik (m)	Maksimum Genliğe Ulaştığı Zaman (s)
20	1,62E-04	1,3
30	9,81E-04	1,51
40	0,0023	0,605
50	0,0088	0,67

Tablo 5.4.2: Tren uzunluğunun Şekil 5.4.1b 'deki grafiğin titreşim genliğine etkisi.

Tren Hızı (m/s)	Maksimum Genlik (m)	Maksimum Genliğe Ulaştığı Zaman (s)
20	0,0458	0,134
30	0,1963	0,32
40	0,6271	0,39
50	1,294	0,46

Şekil 5.4.2(a) ve (b)'de köprü uzunluğunun 4 farklı değeri için, tren gövdesinin ve köprü orta noktası ivme grafikleri sırasıyla verilmiştir. Şekil 5.4.2(a) incelendiğinde, köprü uzunluğunun tren gövdesinin ivmelenmesini arttığı ve maksimum ivmelenme zamanında gecikmeye yol açtığı görülmektedir. Şekil 5.4.2(b) incelendiğinde ise Şekil 5.4.2(a)'dan biraz farklı bir durum gözlemlenmektedir. 0.6'ncı saniyeden sonra köprü uzunluğunun artmasıyla köprü orta noktasının ivmelenmesinde artmaktadır. 0.6'ncı saniyeden önce $l = 20, 30$ ve 40 m için köprü uzunluğunun artmasıyla köprü orta noktası ivmelenmesi de artmaktadır, fakat $l = 40$ ve 50 m'de köprü uzunluğu köprü orta noktası ivmelenmesinde azalmaya sebep olmuştur. Örneğin $l = 20, 30, 40$ ve 50 m için 0.6'ncı saniyeye kadar maksimum ivme değerleri sırasıyla, 0,12, 0,31, 0,92 ve 0,7

m/s^2 'dir. Buradan da anlaşılacağı gibi köprü uzunluğunun 50 m olduğu durum farklılık göstermektedir.



Şekil 5.4.2: Köprü uzunluğunun (l) tren dinamiği üzerindeki etkisinin karşılaştırılması: (a) Tren gövdesinin ivmesi (m/s^2) ve (b) Köprü orta noktası ivmesi (m/s^2).

Tablo 5.4.3: Tren uzunluğunun Şekil 5.4.2a 'deki grafiğin titreşim genliğine etkisi.

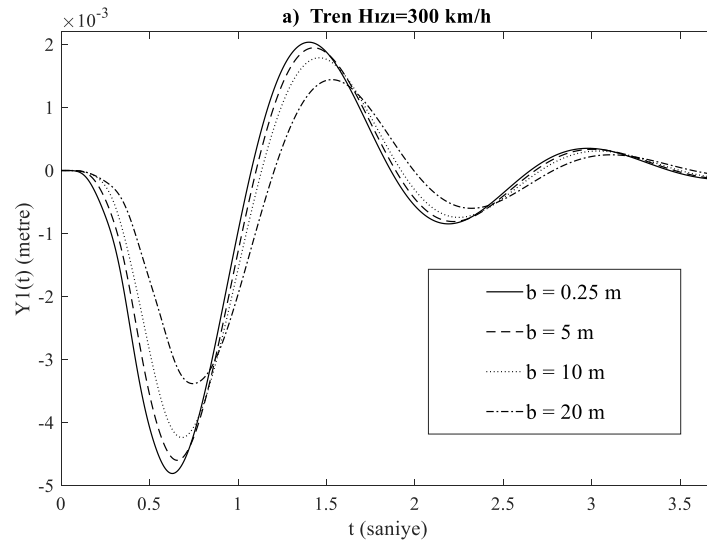
Köprü Uzunluğu (m)	Maksimum Genlik (m)	Maksimum Genliğe Ulaştığı Zaman (s)
20	0,0109	0,475
30	0,0529	0,57
40	0,1885	0,54
50	0,5129	0,69

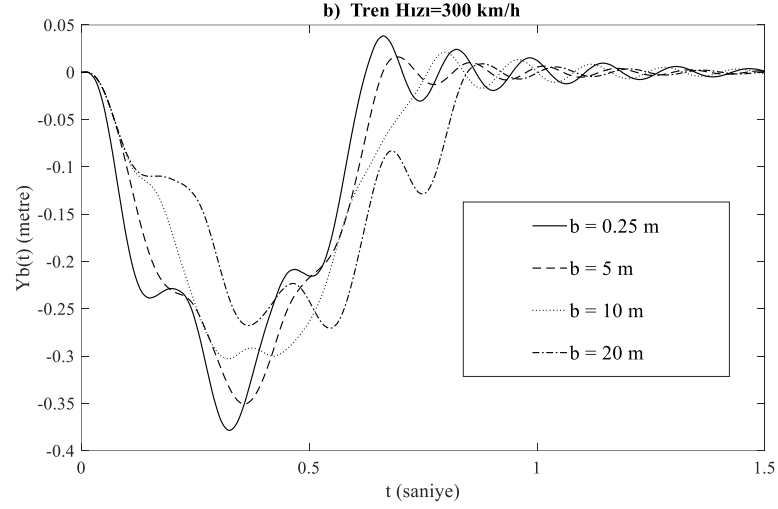
Tablo 5.4.4: Tren uzunluğunun Şekil 5.4.2b 'deki grafiğin titreşim genliğine etkisi.

Tren Hızı (m/s)	Maksimum Genlik (m)	Maksimum Genliğe Ulaştığı Zaman (s)
20	0,1151	0,152
30	0,3259	0,342
40	0,9237	0,4
50	0,7066	0,504

5.5. Tren Aks Mesafesinin(*b*) Tren ve Köprü Dinamiği Üzerindeki Etkisi

Bu çalışmada tren aks mesafesinin tren-köprü etkileşimine olan etkisi incelenmiştir. Şekil 5.5.1(a)'da, tren aks mesafesinin artmasıyla tren gövdesinin maksimum yer değiştirmesinin azaldığı görülmektedir. Bununla birlikte tren aks mesafesinin azalmasıyla tren gövdesinin yer değiştirmesinde zamansal gecikme ortaya çıkmıştır. Zamansal gecikme Şekil 5.5.1(a)'da görülmektedir. Şekil 5.5.1(b) incelendiğinde ise, köprü orta noktasının maksimum yer değiştirmesi, tren aks mesafesinin artmasıyla azalmaktadır. Bununla birlikte tren aks mesafesinin artması köprü orta noktasının yer değiştirmesinde zamansal gecikmeye yol açmıştır.





Şekil 5.5.1: Tren aks mesafesi (b) tren dinamiği üzerindeki etkisinin karşılaştırılması: (a)Tren gövdesinin yer değiştirmesi (m) ve (b) Köprü orta noktasının yer değiştirmesi (m)

Tablo 5.5.1: Tren aks mesafesinin Şekil 5.5.1a 'daki grafiğin titreşim genliğine etkisi.

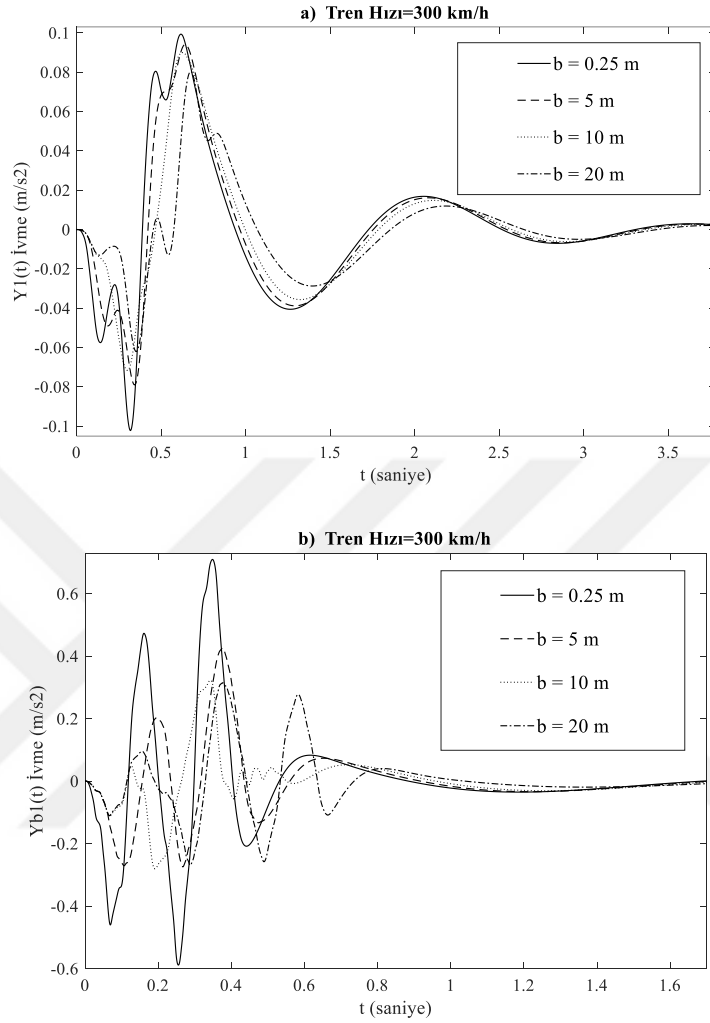
Tren aks mesafesi (m)	Maksimum Genlik (m)	Maksimum Genliğe Ulaştığı Zaman (s)
0,25	4,80E-03	0,629
5	4,60E-03	0,65
10	0,0042	0,682
20	0,0034	0,745

Tablo 5.5.2: Tren aks mesafesinin Şekil 5.5.1b 'deki grafiğin titreşim genliğine etkisi.

Tren aks mesafesi (m)	Maksimum Genlik (m)	Maksimum Genliğe Ulaştığı Zaman (s)
0,25	0,3785	0,324
0,3	0,3506	0,355
0,4	0,3028	0,32
0,5	0,2706	0,543

Şekil 5.5.2(a) ve (b)'de trenin 4 farklı hız değeri için, tren gövdesinin ve köprü orta noktası ivmelenmesi sırasıyla verilmiştir. Bu şekillerde görülebileceği gibi, tren aks mesafesinin artmasıyla tren gövdesinin ve köprü orta noktası ivmesi de azalmaktadır.

Bununla birlikte tren aks mesafesindeki artış maksimum ivmelenmenin meydana gelmesinde gecikmeye yol açmaktadır.



Şekil 5.5.2: Köprü sönüm oranının tren dinamiği üzerindeki etkisinin karşılaştırılması: (a)Tren gövdesinin ivmesi (m/s^2) ve (b) Köprü orta noktası ivmesi (m/s^2).

Tablo 5.5.3: Tren aks mesafesinin Şekil 5.5.2a 'daki grafiğin titreşim genliğine etkisi.

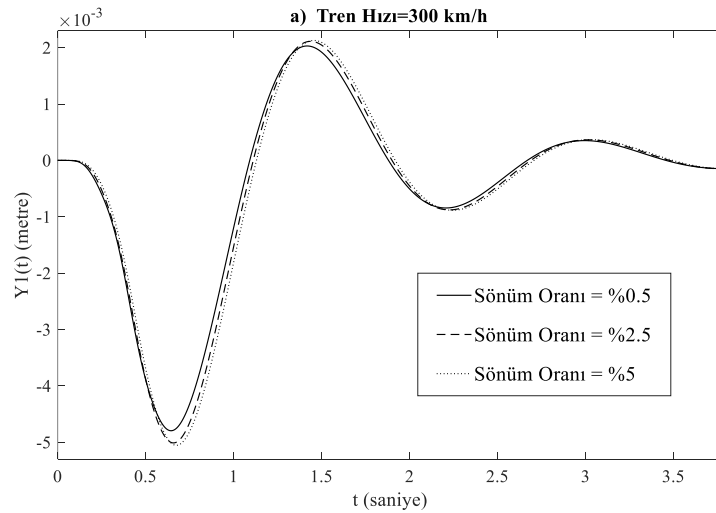
Tren aks mesafesi (m)	Maksimum Genlik (m)	Maksimum Genliğe Ulaştığı Zaman (s)
0,25	0,1022	0,32
0,3	0,0941	0,64
0,4	0,09	0,63
0,5	0,0804	0,68

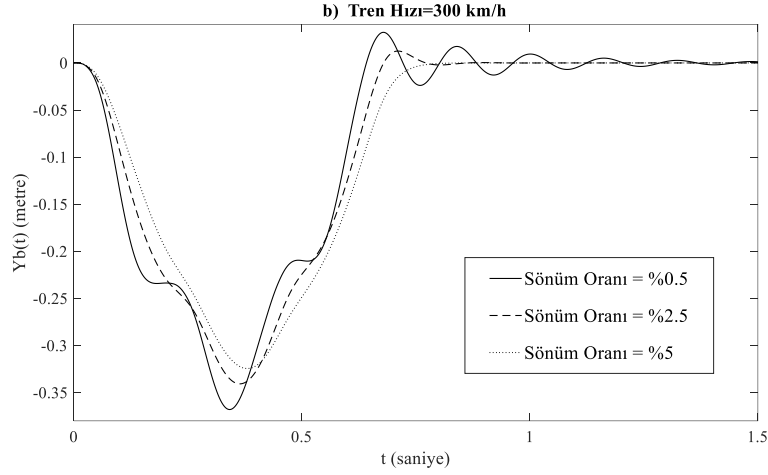
Tablo 5.5.4: Tren aks mesafesinin Şekil 5.5.2b 'deki grafiğin titreşim genliğine etkisi.

Tren aks mesafesi (m)	Maksimum Genlik (m)	Maksimum Genliğe Ulaştığı Zaman (s)
0,25	0,7095	0,35
0,3	0,4265	0,38
0,4	0,3224	0,34
0,5	0,3148	0,375

5.6. Sönüm Oranının (ζ) Trenin Dinamiği Üzerindeki Etkisi

Bu bölümde köprünün sönüm oranının tren-köprü etkileşimine olan etkisi incelenmiştir. Şekil 5.6.1(a)'da, sönüm oranının artmasıyla tren gövdesinin maksimum yer değiştirmesinin arttığı görülmektedir. Bununla birlikte sönüm oranının artmasıyla tren gövdesinin yer değiştirmesinde az da olsa zamansal gecikme ortaya çıkmıştır. Şekil 5.6.1(b) incelendiğinde ise, köprü orta noktasının maksimum yer değiştirmesi, sönüm oranının artmasıyla azalmaktadır. Bununla birlikte tren aks mesafesinin artması köprü orta noktasının yer değiştirmesinde zamansal gecikmeye yol açmıştır. Oluşan zamansal gecikmelerden kaynaklanan faz farkları Şekil 5.6.1(a) ve (b)'deki grafiklerde görülmektedir.





Şekil 5.6.1: Köprü sönüm oranının tren dinamiği üzerindeki etkisinin karşılaştırılması: (a)Tren gövdesinin yer değiştirmesi (m) ve (b) Köprü orta noktasının yer değiştirmesi (m)

Tablo 5.6.1: Sönüm oranının Şekil 5.6.1a 'daki grafiğin titreşim genliğine etkisi.

Sönüm Oranı	Maksimum Genlik (m)	Maksimum Genliğe Ulaştığı Zaman (s)
0.005	4,80E-03	0,64
0.025	5,00E-03	0,655
0.05	0,0051	0,675

Tablo 5.6.2. Sönüm oranının Şekil 5.6.1b 'deki grafiğin titreşim genliğine etkisi.

Sönüm Oranı	Maksimum Genlik (m)	Maksimum Genliğe Ulaştığı Zaman (s)
0.005	0,368	0,34
0.025	0,3407	0,365
0.05	0,3244	0,38

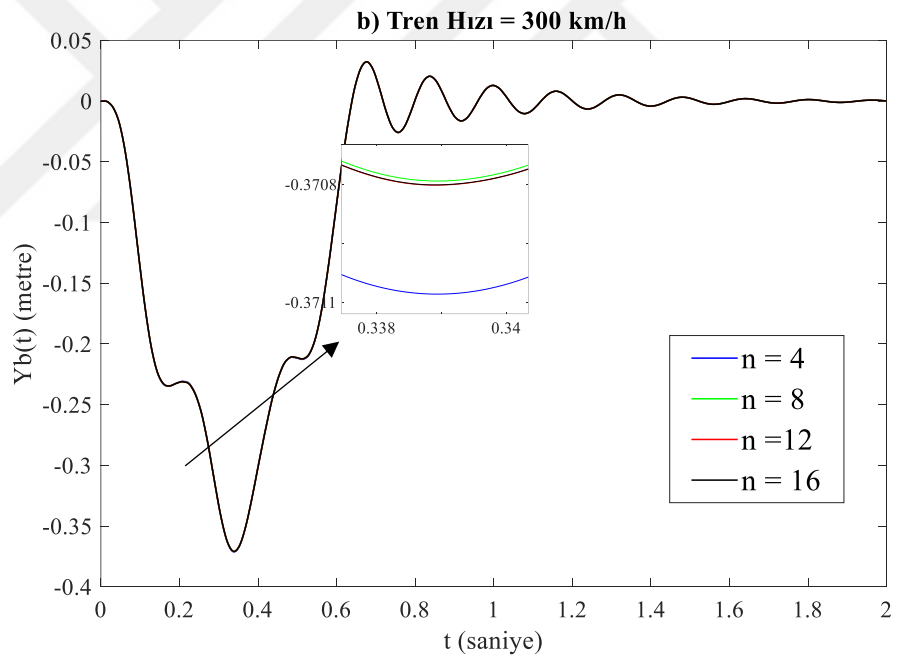
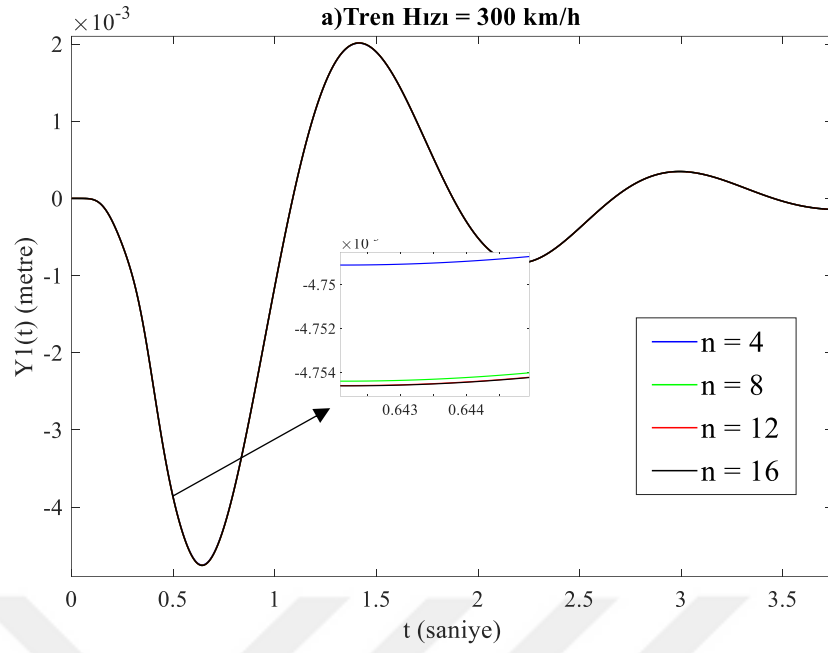
5.7. Köprü Titreşim Mod Sayısının(n) Trenin Dinamiği Üzerindeki Etkisi

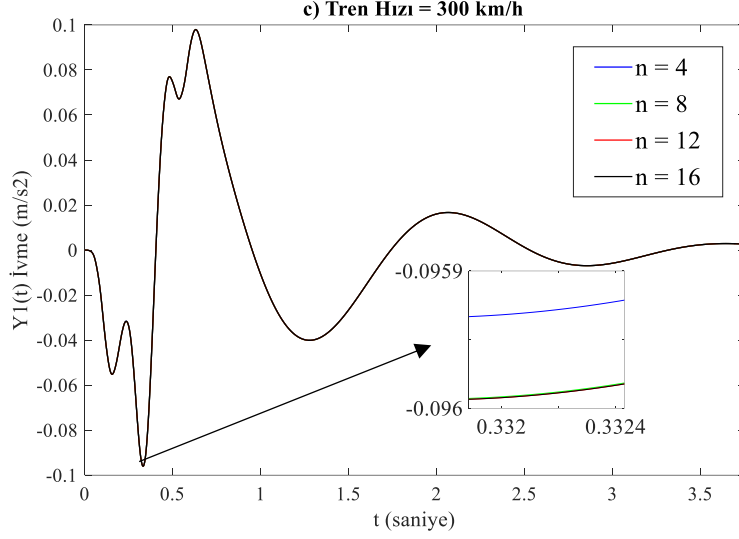
Bu bölümde Euler-Bernoulli kiriş teorisi baz alınarak modellenen esnek köprünün titreşim mod sayısının tren-köprü etkileşimine etkisi incelenmiştir. Bölüm 5.1'de, sadece desteklenen köprü kirişlerinin titreşim modu frekansları tanıtılmıştır. Esnek yapıların titreşim cevabının belirli frekanslar ya da doğal frekanslar için belirlenmesi, meydana gelen zorunlu titreşimlerin incelenmesi için önem teşkil etmektedir. Bu

nedenle, bu bölümde basit mesnetli köprü kirişinin 4, 8, 12 ve 16'ncı titreşim modları göz önünde bulundurularak köprü ve tren dinamikleri incelenmiştir.

Şekil 5.7.1' de tren gövdesinin dikey yer değiştirmesi ve ivmelenmesi ile köprü orta noktasında meydana gelen sehim miktarının farklı mod numaralarına göre değişimi görülmektedir (n=4, 8, 12, 16). Mod numarasına göre Şekil 5.7.1' de verilen grafiklerin karelerinin ortalamasını karakökü(RMS) değerleri Tablo 5.7.1-5.7.3' de verilmiştir. Grafiklerde görüldüğü üzere, incelenen köprü kiriş modları için tren ve köprünün dinamik cevapları hemen hemen aynıdır.

Köprü kirişinin 4'üncü ve 8'inci modları incelendiğinde, tren gövdesinin dikey yer değiştirmesinin RMS değerlerindeki görelî hata değeri % 11713'tür. 4, 8 ve 12'nci modlar dâhil edildiğinde ise 4 ve 8'inci modlardaki sonuçlara kıyasla %0,00457 görelî bir hata değeri ortaya çıkmaktadır. Köprü kirişinin 4, 8, 12 ve 16'ncı modalardaki titreşim frekansları dâhil edildiğinde, görelî hatanın değerinin %0,0034'e kadar düştüğü gözlemlenmektedir. Titreşim modlarının köprü orta noktasının yer değiştirmesine etkisi incelendiğinde ise tren gövdesinde olduğu gibi, RMS değerlerinde meydana gelen görelî farkların 16'ncı mod eklendiğinde %0,0001'e kadar düştüğü ve diğer titreşim modları içinse dikkate alınabilecek bir görelî değişim olmadığı gözlemlenmektedir. Tren gövde ivmelenmesinde de aynı durum gözlemlenmektedir. Bununla birlikte, bu bölümde incelenen grafiklerin maksimum noktalarının titreşim modlarına göre değişimi incelendiğinde ise RMS değerlerinde olduğu gibi dikkate alınabilecek bir görelî değişim olmadığı gözlemlenmektedir. Sonuç olarak, bu çalışmada incelenen köprü kirişi için ilk dört titreşim modunun kullanılması çalışmanın doğruluğu için yeterli olduğu görülmektedir.





Şekil 5.7.1: Köprü titreşim mod sayısının tren dinamiği üzerindeki etkisinin karşılaştırılması: (a) Tren gövdesinin yer değiştirmesi (m), (b) Köprü orta noktasının yer değiştirmesi (m) ve (b) Köprü orta noktasının yer ivmelenmesi (m/s^2)

Tablo 5.7.1: Titreşim mod sayısının köprü orta noktası yer değiştirmesine etkisi

Mode	RMS	% Fark	Maksimum Değer	% Fark
n= 4	0,093955367	-	0,032453136	-
n= 8	0,093954594	0,000823	0,032456366	0,009955751
n= 12	0,093954414	0,000192	0,032457479	0,003426409
n= 16	0,093954503	9,56E-05	0,032457585	0,000328394

Tablo 5.7.2: Titreşim mod sayısının tren gövde yer değiştirmesine etkisi

Mode	RMS	% Fark	Maksimum Değer	% Fark
n= 4	0,001668	-	0,002011314	-
n= 8	0,00167	0,117127059	0,00201361	0,114178266
n= 12	0,00167	0,004567879	0,002013698	0,004361845
n= 16	0,00167	0,000338245	0,002013704	0,000320062

Tablo 5.7.3: Titreşim mod sayısının tren gövde ivmelenmesine etkisi

Mode	RMS	% Fark	Maksimum Değer	% Fark
$n= 4$	0,03224	-	0,097908912	-
$n= 8$	0,032266	0,078840612	0,097946906	0,038806136
$n= 12$	0,032267	0,002516056	0,09794712	0,000217961
$n= 16$	0,032267	0,00016784	0,097947333	0,000217957

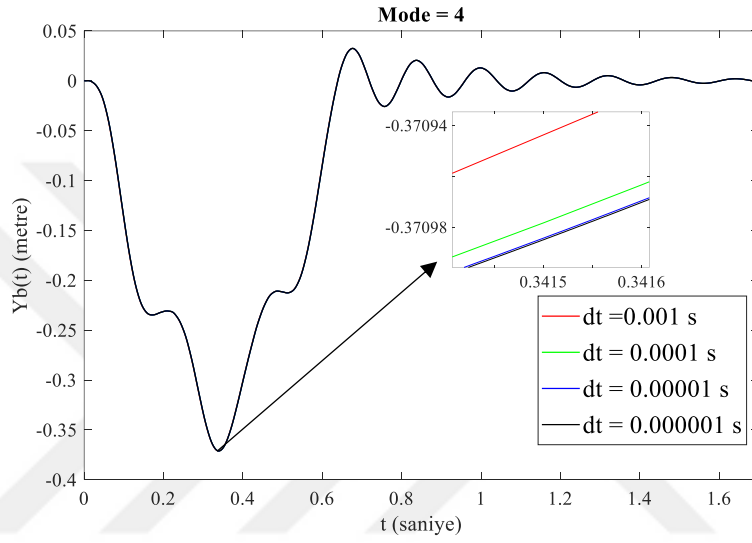
5.8. Zaman Adımı Büyüklüğü Δt 'nin Çözüm Hassasiyetine Etkisi

Nümerik analiz öncesinde, çalışmada kullanılacak uygun zaman adımını belirlenmesi amacıyla Δt 'nin köprü dinamiğine etkisi incelendi. Bunun için aracın tren ön bojisinin köprüye girdiği ve tren arka bojisinin köprüden tamamen çıktığı zaman aralığında köprü orta noktası yer değiştirmesinin RMS değerini dört farklı zaman adımı büyüklüğü Δt (10^{-3} , 10^{-4} , 10^{-5} , 10^{-6} s) için karşılaştırıldı. Karşılaştırma sonrası elde edilen veriler sonuçlar Çizelge 5.1'de sunuldu. Ayrıca Şekil 5.8.1'de köprü orta noktası yer değiştirmesinin dört farklı zaman adımı büyüklüğüne göre değişimi görülmektedir.

Şekil 5.8.1'de görüldüğü üzere dört farklı zaman adımı büyüklüğünün köprü orta noktası değişimine önemli düzeyde bir etkisi ihmal edilebilir düzeydedir. Şekil 5.8.1'de verilen grafiğin 0.34'üncü saniyeyi ele aldığımızda zaman adım büyüklüklerinin etkileri daha net görülmektedir, fakat yine de aralarında dikkate alınabilir bir fark bulunmamaktadır. Tablo 5.8.1 zaman adım büyüklüklerinin etkisini daha net görebilmek için önemlidir. Tablo 5.8.1'de görüldüğü gibi zaman adımı büyüklüğü Δt 10^{-5} 'den 10^{-6} 'ya düştüğünde çözüm süresi 19,324436 s'den 193,214682 s'ye çıkmıştır (Yapılan analizler i7 4600U, 8 GB DDR3 ram kapasitesine sahip bilgisayarda yapılmıştır). Çözüm süresi yaklaşık % 900 artmıştır. Bununla birlikte, Δt 10^{-5} ' ve 10^{-6} için köprü orta noktası yer değiştirmesinin RMS değerleri arasındaki bağıl fark ise %0,0012 olarak belirlenmiştir. Bu değer, çözüm süresindeki %900'lük artış göz önünde bulundurulduğunda dikkate alınamayacak kadar düşük bir öneme sahiptir. Bu nedenle tez çalışması boyunca yapılan analizlerde çözüm zaman adımı büyüklüğü $\Delta t=10^{-5}$ s olarak alınmıştır.

Tablo 5.8.1: Zaman adım büyüklüğünün köprü orta noktası ivmelenmesine etkisi

Δt	RMS	% Bağlı Fark	İşlem Süreci(saniye)	Artış Oranı(%)
3	0,093944	-	0,294562	-
4	0,093955	0,010948155	2,017173	584,8042178
5	0,093956	0,001188171	19,324436	857,9959676
6	0,093956	0,000119108	193,214682	899,8464224



Şekil 5.8.1: Analizde kullanılacak zaman adım miktarının köprü orta noktası yer değiştirmesine etkisi

BÖLÜM 6. SONUÇ VE ÖNERİLER

Bu çalışmada Euler-Bernoulli kiriş teorisi kullanılarak esnek bir köprü ve 10-SD HST modellenmiştir. Daha sonra modelin enerji denklemleri oluşturularak Lagrange metoduyla hareket denklemleri elde edilmiş ve matematiksel model oluşturulmuştur. Köprü'nün hareket denklemi Euler-Bernoulli Kiriş Teorisi kullanılarak elde edilmiş ve trenin hareket denklemleriyle ortak çözülerek TKE modelinin genel hareket denklemi oluşturulmuştur. Sonuç olarak elde edilen matematiksel daha kapsayıcı ve gerçekçi olmuştur. Daha sonra matematiksel model MATLAB ortamında özel bir yazılım ile programlanmıştır. Newmark- β yöntemiyle bağımlı değişken parametrelerinin yer değiştirme, hız ve ivme verilerine ulaşılmıştır. Bununla birlikte tren kütlesi, tren hızı, köprü uzunluğu, aks mesafesi ve sönüm oranının TKE dinamiğine etkisi HST'nin esnek köprü üzerindeki davranışı ele alınarak incelenmiş ve sonuçlar grafik ve tablolar halinde gösterilmiştir. Yapılan incelemeler ve analiz sonuçları kapsamında elde edilen sonuçlar aşağıdaki gibi sıralanmıştır.

1. Oluşturulan matematik model literatürde daha önce yapılan Biggs (1964) (hareketli osilatör modeli) ile karşılaştırılmış olup sonuçların bu çalışmalarda elde edilen sonuçlara oldukça yakın ve benzer olduğu, dolayısıyla sunulan matematik modelin doğruluğu ispatlanmıştır.
2. Hareket denkleminin çözümünde uygulanacak uygun zaman adımı (Δt) büyüklüğünün belirlenmesi için on serbestlik dereceli yarım araç modeli incelenmiştir. On serbestlik dereceli sistemde zaman adımı büyüklüğünün 10^{-5} 'den 10^{-6} 'ya düşmesi sonucunda çözüm süresi 19,3 s'den 193,2 s'ye çıkmıştır ve de çözüm süresinin yaklaşık %900 arttığı gözlemlenmiştir. Bununla birlikte, Δt 10^{-5} ve 10^{-6} için köprü orta noktası yer değiştirmesinin RMS değerleri arasındaki bağıl fark ise %0,0012 olarak gözlemlenmiştir. Dolayısıyla çalışma boyunca uygun zaman adımı büyüklüğünün 10^{-5} s olduğu belirlenmiştir.

3. Euler-Bernoulli kiriş teorisi baz alınarak modellenen esnek köprünün titreşim mod sayısının tren-köprü etkileşimine etkisi incelenmiştir. Bu amaçla dört farklı titreşim modu ($n= 4, 8, 12, 16$) için tren ve köprü dinamikleri karşılaştırılmıştır. Sonuç olarak 4 titreşim modu için de tren ve köprü dinamiklerinin değişiminin ihmal edilebilir düzeyde olduğu gözlemlenmiş ve köprü kiriş analizleri için titreşim mod sayısının 4 olarak belirlenmesi uygun görülmüştür.
4. Tren kütlesinin artmasıyla tren gövdesinde meydana gelen titreşimlerin genliğinde artış olduğu gözlemlenmektedir. Tren kütlesinin 20, 30, 40 ve 50 ton olarak belirlenmesiyle tren gövdesinde meydana gelen titreşim genliğinde sırasıyla %22,3, %16,25 ve %12,2 oranında artış gözlemlenmektedir. Bununla birlikte, kütlesi daha büyük olan trenlerde tren gövdesinde meydana gelen titreşimler daha geç oluşmuş ve dolayısıyla da daha geç sönümlenmiştir.
5. Tren kütlesindeki artmasıyla, tren gövdesinde meydana gelen titreşimlerden kaynaklanan maksimum ivmelenme genliğinin azaldığı gözlemlenmiştir. Tren kütlesinin 20, 30, 40 ve 50 ton olarak belirlenmesiyle tren gövdesinde meydana gelen titreşimlerin ivmelenmesinde sırasıyla %19,2, %0,8 ve %0,12 oranında azalma meydana gelmiştir. Tren gövde ivmelenmesindeki zaman kayması incelendiğinde ise farklı bir sonuç ortaya çıkmaktadır. Tren kütlesi 20, 30 ve 40 ton olarak belirlendiğinde maksimum ivmelenmeye ulaşılan zaman sırasıyla 0,4685 s, 0,6214 s, ve 0,6299 s olarak gözlemlenirken, tren kütlesi 50 ton olarak belirlendiğinde ise maksimum ivmelenmeye ulaşılan zaman 0,3327 s olarak gözlemlenmiştir.
6. Tren kütlesinin artmasıyla köprü orta noktasında meydana gelen titreşimlerin genliğinin arttığı gözlemlenmiştir. Tren kütlesinin 20, 30, 40 ve 50 ton olarak belirlenmesiyle köprü orta noktasında meydana gelen titreşimlerin genliğinde sırasıyla %29,9, %23,07 ve %18,7 oranında artış gözlemlenmektedir. Fakat tren kütlesinin köprü orta noktasında meydana gelen titreşimlerde herhangi bir zaman kaymasına sebep olmadığı görülmektedir.
7. Tren kütlesinin artmasıyla köprü orta noktasındaki ivmelenmenin arttığı gözlemlenmiştir. Tren kütlesinin 20, 30, 40 ve 50 ton olarak belirlenmesiyle artmasıyla köprü orta noktasında meydana gelen titreşimlerden kaynaklanan maksimum ivmelenme genliğinde sırasıyla %42,2, %24,8 ve %19,9 oranında

artış gözlemlenmektedir. Bununla birlikte tren kütlesinin, köprü orta noktasında meydana gelen titreşimlerden kaynaklanan maksimum ivmelenme genliğinde önemli bir zaman kaymasına sebep olmadığı görülmüştür.

8. Tren hızının artmasıyla tren gövdesinde meydana gelen titreşimlerin genliğinde önemli bir değişikliğe yol açmadığı gözlemlenmektedir. Tren hızının 40, 80, 120 m/s olarak belirlenmesiyle tren gövdesinde meydana gelen titreşim genliğinde sırasıyla %2,5 ve %1,2 oranında artış, daha sonra tren hızının 160 m/s 'ye çıkartılmasıyla da tren gövdesinde meydana gelen titreşimlerde %6,4 oranında azalma gözlemlenmektedir. Bununla birlikte, tren hızının artması, meydana gelen titreşimlerde bir zaman kaymasına sebep olmaktadır.
9. Tren hızındaki artmasıyla, tren gövdesinde meydana gelen titreşimlerden kaynaklanan maksimum ivmelenme genliğinin de arttığı gözlemlenmiştir. Tren hızının 40, 80, 120 ve 160 m/s olarak belirlenmesiyle tren gövdesinde meydana gelen titreşimlerin ivmelenmesinde sırasıyla %144, %51,6 ve %9,8 oranında artış meydana gelmiştir. Bununla birlikte, tren hızı azaldıkça, tren gövde yer değiştirmesinde olduğu gibi, tren gövde ivmelenmesinde zaman kayması ortaya çıkmaktadır. Tren hızındaki artışın köprü orta noktasının yer değiştirmesinde de önemli bir değişikliğe yol açmadığı gözlemlenmiştir.
10. Tren hızının artmasıyla köprü orta noktasında meydana gelen titreşimlerin genel olarak arttığı gözlemlenmiştir. Tren hızının 40, 80, 120 m/s olarak belirlenmesiyle köprü orta noktasında meydana gelen titreşim genliğinde sırasıyla %0,6 ve %0,05 oranında artış, tren hızı 160 m/s' ye çıkartılmasıyla % 0,32 oranında azalma meydana gelmiştir. Buna karşın, tren hızının artmasıyla köprü orta noktasında meydana gelen titreşimlerin daha erken sönümlendiği görülmektedir.
11. Tren hızının artmasıyla köprü orta noktası ivmelenme genliğinin arttığı gözlemlenmiştir. Tren hızının 40, 80, 120 ve 160 m/s olarak belirlenmesiyle tren gövdesinde meydana gelen ivmelenme genliğinde sırasıyla % 129, % 35,5 ve % 68,7 oranında artış gözlemlenmektedir.
12. Köprü uzunluğunun artmasıyla tren gövdesinde meydana gelen titreşimlerin genliğinde artış olduğu gözlemlenmektedir. Tren kütlesinin 20, 30, 40 ve 50 metre olarak belirlenmesiyle tren gövdesinde meydana gelen titreşim genliğinde sırasıyla %505,5, %134,4 ve %282,6 oranında artış gözlemlenmektedir. Bununla

birlikte, köprü uzunluğu ile ten gövdesinde meydana gelen titreşimlerin zaman kayması incelendiğinde net bir sonuç ortaya çıkmamaktadır. Köprü uzunluğu 20 ve 30 metre olarak belirlendiğinde tren gövdesindeki titreşimlerde zaman kayması meydana gelmiş, fakat köprü uzunluğu 40 metre' ye çıkartıldığında ise maksimum genliğe ulaşılan zaman azalmıştır.

13. Köprü uzunluğunun artmasıyla, tren gövdesinde meydana gelen titreşimlerden kaynaklanan maksimum ivmelenme genliğinin de arttığı gözlemlenmiştir. Tren kütlelerinin 20, 30, 40 ve 50 metre olarak belirlenmesiyle tren gövdesinde meydana gelen titreşimlerin ivmelenmesinde sırasıyla %385,3, %256,3 ve %172 oranında artma meydana gelmiştir. Tren gövde ivmelenmesindeki zaman kayması incelendiğinde ise, tren gövdesi yer değiştirmesinde olduğu gibi, net bir yargıya varılamamaktadır.
14. Köprü uzunluğunun artmasıyla köprü orta noktasında meydana gelen titreşim genliğinde artış olduğu gözlemlenmiştir. Köprü uzunluğunun 20, 30, 40 ve 50 metre olarak belirlenmesiyle köprü orta noktasında meydana gelen titreşimlerin genliğinde sırasıyla %328,6, %219,4 ve %106,3 oranında artış olduğu gözlemlenmektedir. Bununla birlikte, köprü uzunluğunun köprü orta noktası ivmelenmesinde zaman kaymasına sebep olduğu görülmektedir.
15. Köprü uzunluğunun artmasıyla köprü orta noktası ivmelenmesinde farklı bir durum gözlemlenmiştir. Köprü uzunluğunun 20, 30 ve 40 metre olarak belirlenmesiyle köprü orta noktasında meydana gelen titreşimlerden kaynaklanan maksimum ivmelenme genliğinde sırasıyla %183,1 ve %183,4 oranında artış, köprü uzunluğu 50 metreye çıkartıldığında ise köprü orta noktası ivmelenmesinde %23,5 oranında düşüş gözlemlenmektedir. Bununla birlikte, köprü uzunluğunun köprü orta noktası ivmelenmesinde herhangi bir zaman kaymasına sebep olup olmadığı hakkında net bir yargıya varılamamaktadır.
16. Tren aks mesafesinin artmasıyla tren gövdesinde meydana gelen titreşimlerin genliğinin azaldığı gözlemlenmektedir. Tren aks mesafesinin 0.25, 5, 10 ve 20 metre olarak belirlenmesiyle tren gövdesinde meydana gelen titreşim genliğinde sırasıyla % 4,1, % 8,7 ve % 19 oranında düşüş gözlemlenmektedir. Bununla birlikte, tren aks mesafesinin artmasıyla tren gövdesinde meydana gelen titreşimlerde zaman kayması meydana gelmiştir.

17. Tren aks mesafesinin artmasıyla, tren gövdesinde meydana gelen titreşimlerden kaynaklanan maksimum ivmelenme genliğinin de azaldığı gözlemlenmiştir. Tren aks mesafesinin 0.25, 5, 10 ve 20 metre olarak belirlenmesiyle tren gövdesinde meydana gelen titreşimlerin ivmelenmesinde sırasıyla %7,9, % 4,3 ve % 10,6 oranında düşüş meydana gelmiştir. Tren gövde ivmelenmesindeki zaman kayması incelendiğinde ise, tren gövdesi yer değiştirmesinde olduğu gibi, net bir yargıya varılamamaktadır.
18. Tren aks mesafesinin artmasıyla köprü orta noktasında meydana gelen titreşim genliğinin azaldığı görülmektedir. Tren aks mesafesinin 0.25, 5, 10 ve 20 metre olarak belirlenmesiyle köprü orta noktasında meydana gelen titreşimlerin genliğinde sırasıyla %7,4, %13,6 ve %10,6 oranında düşüş olduğu gözlemlenmektedir.
19. Tren aks mesafesinin artmasıyla köprü orta noktası ivmelenmesinde azalma meydana geldiği gözlemlenmektedir. Tren aks mesafesinin 0.25, 5, 10 ve 20 metre olarak belirlenmesiyle köprü orta noktasında meydana gelen titreşimlerden kaynaklanan maksimum ivmelenme genliğinde sırasıyla % 39,8 ve % 24,4 ve % 2,3 oranında azalma meydana gelmektedir. Bununla birlikte, köprü uzunluğunun köprü orta noktası ivmelenmesinde herhangi bir zaman kaymasına sebep olup olmadığı hakkında net bir yargıya varılamamaktadır.
20. Köprü sönüm oranının artmasıyla tren gövdesinde meydana gelen titreşimlerin genliğinin arttığı gözlemlenmektedir. Sönüm oranının % 0,5, %2,5 ve %5 olarak belirlenmesiyle tren gövdesinde meydana gelen titreşim genliğinde sırasıyla % 4,2 ve % 2 artış gözlemlenmektedir. Bununla birlikte, tren aks mesafesinin artmasıyla tren gövdesinde meydana gelen titreşimlerde zaman kayması meydana gelmiştir.
21. Köprü sönüm oranının artmasıyla, tren gövdesinde meydana gelen titreşimlerden kaynaklanan maksimum ivmelenme genliğinin de azaldığı gözlemlenmiştir.
22. Köprü sönüm oranının artmasıyla köprü orta noktasında meydana gelen titreşim genliğinin azaldığı görülmektedir. Sönüm oranının % 0,5, %2,5 ve %5 olarak belirlenmesiyle köprü orta noktasında meydana gelen titreşimlerin genliğinde sırasıyla %7,4 ve %4,8 oranında düşüş olduğu gözlemlenmektedir. Buna karşın

sönüm oranının artmasıyla köprü orta noktasında meydana gelen titreşimlerde zaman kayması olduğu gözlemlenmektedir.

Sonuç olarak tren-köprü etkileşimi süresince birçok doğrusal ve dairesel titreşim ortaya çıkmaktadır. Bu titreşimler tren gövdesinde sarsılmalara neden olmaktadır. Oluşan sarsılmalar yolcuların konforunu olumsuz etkilemekle birlikte tren sürüş güvenliği açısından da sorun teşkil etmektedir. Ayrıca sadece tren gövdesi değil boji ve tekerleklerde de köprüden gelen dinamik etkiler sonucu titreşim hareketi gözlemlenmektedir. Bunun sonucunda trenin mekanik aksamında kullanılan hareketli parçalar zamanla deforme olmaktadır ve kullanım ömürleri azalmaktadır. Tüm etkiler göz önüne alındığında köprüde oluşan dinamik etkilerden kaynaklanan titreşimlerin kullanılacak bir sönümleyici mekanizma ile azaltılması ve hatta sönümlenmesi, sürüş güvenliği, yolcu konforu ve ortaya çıkabilecek mekanik sorunlar açısından önemlidir.

KAYNAKLAR

- Arvidsson, Therese. 2014. "Train-Bridge Interaction: Literature Review and Parameter Screening SCHOOL OF ARCHITECTURE AND THE BUILT ENVIRONMENT."
- Biggs, John M. 1964. "Introduction to Structural Dynamics." *Protection of the Architectural Heritage Against Earthquakes*.
- Bilgin, Erbil. 2015. "Y32 BOJİSİNİN FARKLI VAGON AĞIRLIKLARINA ADAPTASYONU." Yıldız Teknik Üniversitesi.
- Bolat, Selahattin, and Menderes Kam. 2020. "An Evaluation on Vibration Analysis of Y32 Bogie Used in Railway Systems." (December 2019).
- Eroğlu, Mustafa, İsmail Esen, and Mehmet Akif Koç. 2017. "SONLU ELEMENLAR YÖNTEMİ KULLANARAK DEMİRYOLU BOJİLERİNİN TİTREŞİM ANALİZİ." *UMAS 2017*.
- Gündüz, Sabri. 2010. "TAŞITLARDA AKTİF SÜSPANSİYON SİSTEMİ KONTROLÜ." İSTANBUL TEKNİK ÜNİVERSİTESİ.
- Koç, Mehmet Akif. 2017. "Araç Yol Etkileşiminin Modellenmesi Ve Araca Etki Eden Dinamik Kuvvetlerin Analizi." Karabük Üniversitesi.
- Maden, Dinçer. 2012. "AKTİF SÜSPANSİYONLU BİR ÇEYREK ARAÇ MODELİNİN GÖZLEMLEYİCİ İLE OPTİMAL KONTROLÜ." SAKARYA ÜNİVERSİTESİ.
- Şengirgin, Mesut, İbrahim Yüksel, Elif Erzan, Gürsel Şefkat, and Mahmut Nedim Şiren. 2000. "PASİF ve YARI AKTİF SÜSPANSİYON SİSTEMLERİNİN TİTREŞİM YALITIM PERFORMANSININ İNCELENMESİ." *9. Uluslararası Makina Tasarım ve İmalat Kongresi*.

- Sevgi, Levent. 2005. "Depremlerin Algılanması ve Kestirim: Modelleme, Geçerlilik Analizleri ve Veri Doğrulama." *Deprem Sempozyumu* 140–46.
- Tetik, Mustafa, and Mustafa Kocadağ. 2019. "YENİ NESİL ARAÇLAR İÇİN AKTİF SÜSPANSİYON SİSTEMİ." SAKARYA UYGULAMALI BİLİMLER ÜNİVERSİTESİ.
- Ulukapı, Murat. 2005. "AKTİF VE YARI AKTİF SÜSPANSİYON SİSTEMLERİNİN SİMÜLASYON ORTAMINDA İNCELENMESİ." İSTANBUL TEKNİK ÜNİVERSİTESİ.
- Uygun, Recep. 2017. "ÖRNEK BİR EMU BOJİ ŞASİSİNİN STATİK ANALİZİ." HİTİT ÜNİVERSİTESİ.
- Yıldırım, Engin. 2020. "DİNAMİK DAVRANIŞLARININ ANALİZİ." KARABÜK ÜNİVERSİTESİ.
- Yüncü, Selma, and Cihan Aslan. 2002. "NÜMERİK YÖNTEMLERDE HATA ANALİZİ VE BİR NÜMERİK ÇÖZÜM PAKETİNİN HAZIRLANMASI." *Gazi Üniversitesi Mühendislik-Mimarlık Fakültesi Dergisi* 17(2):87–102.

EKLER

Sönüm matrisi aşağıda verildiği şekilde 2x2 boyutunda 64 adet matrise bölünmek üzere Denklem (A.6) ile ve alt matrisler Denklemler (A.7-A.8) ile verilmiştir

$$\begin{aligned}
 M_{6,1} \quad & M_{1x1} = \begin{bmatrix} m_{11} & 0 \\ 0 & J \end{bmatrix} M_{1x2} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} M_{1x3} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} M_{1x4} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \\
 & M_{1x5} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} M_{1x6} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} M_{1x7} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} M_{1x8} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}
 \end{aligned} \tag{A.3}$$

$$M_{6,2} \quad M_{2x1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} M_{2x2} = \begin{bmatrix} m_{21} & 0 \\ 0 & J_{21} \end{bmatrix} M_{2x3} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} M_{2x4} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$M_{6,3} \quad M_{2x5} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} M_{2x6} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} M_{2x7} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} M_{2x8} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$M_{3x1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} M_{3x2} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} M_{3x3} = \begin{bmatrix} m_{31} & 0 \\ 0 & J_{31} \end{bmatrix} M_{3x4} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$M_{7,1} \quad M_{3x5} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} M_{3x6} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} M_{3x7} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} M_{3x8} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$M_{4x1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} M_{4x2} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} M_{4x3} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} M_{4x4} = \begin{bmatrix} m_{41} & 0 \\ 0 & m_{42} \end{bmatrix} \tag{A.4}$$

$$M_{7,2} \quad M_{4x5} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} M_{4x6} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} M_{4x7} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} M_{4x8} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$M_{7,3} \quad M_{5x1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} M_{5x2} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} M_{5x3} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} M_{5x4} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$M_{5x5} = \begin{bmatrix} m_{51} & 0 \\ 0 & m_{52} \end{bmatrix} M_{5x6} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} M_{5x7} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} M_{5x8} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned}
M_{8 \times 1} &= \begin{bmatrix} \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \left[\phi_{1n} \delta_1 \left(\frac{a_2 b_2}{ab} \right) + \phi_{2n} \delta_2 \left(\frac{a_2 b_1}{ab} \right) + \phi_{3n} \delta_3 \left(\frac{c_2}{c} \right) + \phi_{4n} \delta_4 \left(\frac{c_1}{ac} \right) \right] m_s \left[\frac{\phi_{1n} \delta_1 b_2 + \phi_{2n} \delta_2 b_1}{ab} + \frac{-\phi_{3n} \delta_3 c_2 + \phi_{4n} \delta_4 a_1 c_1}{ac} \right] J \end{bmatrix} \\
M_{8 \times 2} &= \begin{bmatrix} \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \left[\phi_{1n} \delta_1 \frac{b_2}{b} + \phi_{2n} \delta_2 \frac{b_1}{b} \right] m_{b1} \quad \left[\phi_{1n} \delta_1 - \frac{\phi_{2n} \delta_2}{b} \right] J_{b1} \end{bmatrix} \quad M_{8 \times 3} = \begin{bmatrix} \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \left[\phi_{3n} \delta_1 \frac{c_2}{c} + \phi_{4n} \delta_2 \frac{c_1}{c} \right] m_{b2} \quad \frac{\phi_{3n} \delta_3 - \phi_{4n} \delta_4}{c} J_{b2} \end{bmatrix} \\
M_{8 \times 4} &= \begin{bmatrix} \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \phi_{1n} \delta_1 m_{t1} \quad \phi_{2n} \delta_2 m_{t2} \end{bmatrix} \quad M_{8 \times 5} = \begin{bmatrix} \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \phi_{3n} \delta_3 m_{t3} \quad \phi_{4n} \delta_4 m_{t4} \end{bmatrix} \quad M_{8 \times 6} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad M_{8 \times 7} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad M_{8 \times 8} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}
\end{aligned} \tag{A.5}$$

Sönüm matrisi aşağıda verildiği şekilde 2x2 boyutunda 64 adet matrise bölünmüştür. Genel sönüm matrisi Denklem (A.6) ile ve alt matrisler Denklemler (A.7-A.8) ile verilmiştir.

$$C = \begin{bmatrix} C_{1x1} & C_{1x2} & C_{1x3} & C_{1x4} & C_{1x5} & C_{1x6} & C_{1x7} & C_{1x8} \\ C_{2x1} & C_{2x2} & C_{2x3} & C_{2x4} & C_{2x5} & C_{2x6} & C_{2x7} & C_{2x8} \\ C_{3x1} & C_{3x2} & C_{3x3} & C_{3x4} & C_{3x5} & C_{3x6} & C_{3x7} & C_{3x8} \\ C_{4x1} & C_{4x2} & C_{4x3} & C_{4x4} & C_{4x5} & C_{4x6} & C_{4x7} & C_{4x8} \\ C_{5x1} & C_{5x2} & C_{5x3} & C_{5x4} & C_{5x5} & C_{5x6} & C_{5x7} & C_{5x8} \\ C_{6x1} & C_{6x2} & C_{6x3} & C_{6x4} & C_{6x5} & C_{6x6} & C_{6x7} & C_{6x8} \\ C_{7x1} & C_{7x2} & C_{7x3} & C_{7x4} & C_{7x5} & C_{7x6} & C_{7x7} & C_{7x8} \\ C_{8x1} & C_{8x2} & C_{8x3} & C_{8x4} & C_{8x5} & C_{8x6} & C_{8x7} & C_{8x8} \end{bmatrix} \tag{A.6}$$

$$C_{1x1} = \begin{bmatrix} c_{s1} + c_{s2} & c_{s1}a_1 + c_{s2}a_2 \\ c_{s1}a_1 - c_{s2}a_2 & c_{s1}a_1^2 + c_{s2}a_2^2 \end{bmatrix} C_{1x2} = \begin{bmatrix} -c_{s1} & 0 \\ -c_{s1}a_1 & 0 \end{bmatrix} C_{1x3} = \begin{bmatrix} -c_{s2} & 0 \\ c_{s2}a_2 & 0 \end{bmatrix} C_{1x4} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$C_{1x5} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} C_{1x6} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} C_{1x7} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} C_{1x8} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$C_{2x1} = \begin{bmatrix} -c_{s1} & -c_{s1}a_1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} C_{2x2} = \begin{bmatrix} c_{s1} + c_{b1} + c_{b2} & c_{b1}b_1 - c_{b2}b_2 \\ c_{b1}b_1 - c_{b2}b_2 & c_{b1}b_1^2 + c_{b2}b_2^2 \end{bmatrix} C_{2x3} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} C_{2x4} = \begin{bmatrix} -c_{b1} & c_{b2} \\ -c_{b1}b_1 & c_{b2}b_2 \end{bmatrix}$$

$$C_{2x5} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} C_{2x6} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} C_{2x7} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} C_{2x8} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

(A.7)

$$C_{3x1} = \begin{bmatrix} -c_{s2} & c_{s2}a_2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} C_{3x2} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} C_{3x3} = \begin{bmatrix} c_{s2} + c_{b3} + c_{b4} & c_{b3}c_1 - c_{b4}c_2 \\ c_{b3}c_1 - c_{b4}c_2 & c_{b3}c_1^2 + c_{b4}c_2^2 \end{bmatrix} C_{3x4} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$C_{3x5} = \begin{bmatrix} -c_{b3} & -c_{b4} \\ -c_{b3}c_1 & c_{b4}c_2 \end{bmatrix} C_{3x6} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} C_{3x7} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} C_{3x8} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$C_{4x1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} C_{4x2} = \begin{bmatrix} -c_{b1} & -c_{b1}b_1 \\ -c_{b2} & c_{b2}b_2 \end{bmatrix} C_{4x3} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} C_{4x4} = \begin{bmatrix} c_{b1} & 0 \\ 0 & c_{b2} \end{bmatrix}$$

$$C_{4x5} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} C_{4x6} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} C_{4x7} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} C_{4x8} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$C_{5x1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} C_{5x2} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} C_{5x3} = \begin{bmatrix} -c_{b3} & -c_{b3}c_1 \\ -c_{b4} & c_{b4}c_2 \end{bmatrix} C_{5x4} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$C_{5x5} = \begin{bmatrix} c_{b3} & 0 \\ 0 & c_{b4} \end{bmatrix} C_{5x6} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} C_{5x7} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} C_{5x8} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$C_{6x1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} C_{6x2} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} C_{6x3} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} C_{6x4} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$C_{6x5} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} C_{6x6} = \begin{bmatrix} 2\zeta_1\omega_1 & 0 \\ 0 & 2\zeta_2\omega_2 \end{bmatrix} C_{6x7} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} C_{6x8} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

(A.8)

$$C_{7x1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} C_{7x2} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} C_{7x3} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} C_{7x4} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$C_{7x5} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}_{7x6} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} C_{7x7} = \begin{bmatrix} 2\zeta_3\omega_3 & 0 \\ 0 & . \end{bmatrix} C_{7x8} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$C_{8x1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} C_{8x2} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} C_{8x3} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} C_{8x4} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$C_{8x5} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} C_{8x6} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} C_{8x7} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} C_{8x8} = \begin{bmatrix} . & 0 \\ 0 & 2\zeta_n\omega_n \end{bmatrix}$$

Direngenlik matrisi aşağıda verildiği şekilde 2x2 boyutunda 64 adet matrise bölünmüştür. Genel direngenlik matrisi Denklem (A.9) ile ve alt matrisler Denklemler (A.10-A.11) ile verilmiştir

$$K = \begin{bmatrix} K_{1x1} & K_{1x2} & K_{1x3} & K_{1x4} & K_{1x5} & K_{1x6} & K_{1x7} & K_{1x8} \\ K_{2x1} & K_{2x2} & K_{2x3} & K_{2x4} & K_{2x5} & K_{2x6} & K_{2x7} & K_{2x8} \\ K_{3x1} & K_{3x2} & K_{3x3} & K_{3x4} & K_{3x5} & K_{3x6} & K_{3x7} & K_{3x8} \\ K_{4x1} & K_{4x2} & K_{4x3} & K_{4x4} & K_{4x5} & K_{4x6} & K_{4x7} & K_{4x8} \\ K_{5x1} & K_{5x2} & K_{5x3} & K_{5x4} & K_{5x5} & K_{5x6} & K_{5x7} & K_{5x8} \\ K_{6x1} & K_{6x2} & K_{6x3} & K_{6x4} & K_{6x5} & K_{6x6} & K_{6x7} & K_{6x8} \\ K_{7x1} & K_{7x2} & K_{7x3} & K_{7x4} & K_{7x5} & K_{7x6} & K_{7x7} & K_{7x8} \\ K_{8x1} & K_{8x2} & K_{8x3} & K_{8x4} & K_{8x5} & K_{8x6} & K_{8x7} & K_{8x8} \end{bmatrix} \quad (A.9)$$

$$K_{1x1} = \begin{bmatrix} k_{s1} + k_{s2} & k_{s1}a_1 + k_{s2}a_2 \\ k_{s1}a_1 - k_{s2}a_2 & k_{s1}a_1^2 + k_{s2}a_2^2 \end{bmatrix} K_{1x2} = \begin{bmatrix} -k_{s1} & 0 \\ -k_{s1}a_1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$K_{1x3} = \begin{bmatrix} -k_{s2} & 0 \\ k_{s2}a_2 & 0 \end{bmatrix} K_{1x4} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$K_{1x5} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} K_{1x6} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} K_{1x7} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} K_{1x8} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$K_{2x1} = \begin{bmatrix} -k_{s1} & -k_{s1}a_1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} K_{2x2} = \begin{bmatrix} k_{s1} + k_{b1} + k_{b2} & k_{b1}b_1 - k_{b2}b_2 \\ k_{b1}b_1 - k_{b2}b_2 & k_{b1}b_1^2 + k_{b2}b_2^2 \end{bmatrix}$$

$$K_{2x3} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} K_{2x4} = \begin{bmatrix} -k_{b1} & k_{b2} \\ -k_{b1}b_1 & k_{b2}b_2 \end{bmatrix}$$

$$K_{2x5} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} K_{2x6} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} K_{2x7} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} K_{2x8} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$K_{3x1} = \begin{bmatrix} -k_{s2} & k_{s2}a_2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} K_{3x2} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$K_{3x3} = \begin{bmatrix} k_{s2} + k_{b3} + k_{b4} & k_{b3}c_1 - k_{b4}c_2 \\ k_{b3}c_1 - k_{b4}c_2 & k_{b3}c_1^2 + k_{b4}c_2^2 \end{bmatrix} K_{3x4} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$K_{3x5} = \begin{bmatrix} -k_{b3} & -k_{b4} \\ -k_{b3}c_1 & k_{b4}c_2 \end{bmatrix} K_{3x6} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$K_{3x7} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} K_{3x8} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$K_{4x1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} K_{4x2} = \begin{bmatrix} -k_{b1} & -k_{b1}b_1 \\ -c_{b2} & k_{b2}b_2 \end{bmatrix}$$

$$K_{4x3} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} K_{4x4} = \begin{bmatrix} k_{b1} & 0 \\ 0 & k_{b2} \end{bmatrix}$$

$$K_{4x5} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} K_{4x6} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$K_{4x7} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} K_{4x8} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

(A.10)

$$K_{5x1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} K_{5x2} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} K_{5x3} = \begin{bmatrix} -k_{b3} & -k_{b3}c_1 \\ -k_{b4} & k_{b4}c_2 \end{bmatrix} K_{5x4} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$K_{5x5} = \begin{bmatrix} k_{b3} & 0 \\ 0 & k_{b4} \end{bmatrix} K_{5x6} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} K_{5x7} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} K_{5x8} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$K_{6x1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} K_{6x2} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} K_{6x3} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} K_{6x4} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$K_{6x5} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} K_{6x6} = \begin{bmatrix} \omega_1^2 & 0 \\ 0 & \omega_2^2 \end{bmatrix} K_{6x7} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} K_{6x8} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

(A.11)

$$K_{7x1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} K_{7x2} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} K_{7x3} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} K_{7x4} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$K_{7x5} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} K_{7x6} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} K_{7x7} = \begin{bmatrix} \omega_3^2 & 0 \\ 0 & \cdot \end{bmatrix} K_{7x8} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$K_{8x1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} K_{8x2} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} K_{8x3} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} K_{8x4} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$K_{8x5} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} K_{8x6} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} K_{8x7} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} K_{8x8} = \begin{bmatrix} \cdot & 0 \\ 0 & \omega_n^2 \end{bmatrix}$$